LUKION LYHYT MATEMATIIKKA

Sanna Hassinen

Katariina Hemmo

Timo Taskinen

SIGMA 8

Matemaattisia malleja III

Sanoma Pro Oy ≡ Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-1561-4 Sigma 8

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2352-7
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2353-4

Toimitus: Juho Niemelä, Kirsi Malila
Typografia: Riitta Piuva
Taitto: Tmi Sivunvalmistus Pirjo Seppä
Kansi: Riitta Piuva
Piirrokset: Marvegraf Oy, Marja Venäläinen
Valokuvat: Fortum (s. 73); Kuvaario / Pertti Westergren (s. 53); Kuvaliiteri / LKA / Martti Roininen (s. 71); SKOY / Corbis / Mark Bolton (s. 67); Reg Charity (s. 90) / SPL / Martin Dohrn (s. 69); www.kuvakori.com (s. 39, 42, 80, 83)

© Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

1 Trigonometriset funktiot 7

1.1 Erilaisia kulmia ja kulman yksiköitä 7
Tehtäviä 12
1.2 Sini, kosini ja tangentti 14
Tehtäviä 28

2 Trigonometriset yhtälöt 33

2.1 Siniyhtälö 33
Tehtäviä 40
2.2 Kosini- ja tangenttiyhtälöt 43
Tehtäviä 50

Keskeisiä käsitteitä trigonometriasta 54

3 Trigonometriset funktiot jaksollisten ilmiöiden malleina 55

3.1 Trigonometristen funktioiden jaksollisuus 55
Tehtäviä 61
3.2 Sovelluksia 64
Tehtäviä 71

4 Geometriaa 75

4.1 Kolmion ja suunnikkaan ala 75
Tehtäviä 81
4.2 Sinilause 84
Tehtäviä 89
4.3 Kosinilause 92
Tehtäviä 96

Keskeisiä käsitteitä geometriasta 99

5 Vektorilaskenta 100

5.1 Peruskäsitteitä 100
Tehtäviä 106
5.2 Laskutoimitukset 110
Tehtäviä 118
5.3. Komponentteihin jako 122
Tehtäviä 127
5.4 Vektorit *xy*-koordinaatistossa 129
Tehtäviä 136
5.5 Vektorit *xyz*-koordinaatistossa 139
Tehtäviä 149
5.6 Vektoreiden pistetulo eli skalaaritulo 151
Tehtäviä 157

Keskeisiä käsitteitä vektoreista 159

Kertausosa 160

Tehtävien vastaukset 174

Hakemisto 182

Alkusanat

Matematiikan opetuksen tarkoituksena on rohkaista opiskelijaa oivaltavaan oppimiseen sekä kehittää matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoja. Sigman rakenne tukee näiden tavoitteiden toteutumista.

Kirjan rakenne

SIGMA 8 Matemaattisia malleja III on rakenteeltaan samanlainen kuin muutkin Sigma-sarjan kirjat. Kirjassa on

- *pohdintatehtäviä* lukujen alussa opiskeltavan asian johdatteluun
- *sivuotsikoita* teorian ja tehtävien läpikäynnin helpottamiseksi
- *sekalaisia tehtäviä* tehtäväosioiden lopussa
- *kertausosa* kirjan lopussa koko kurssin kertaukseen.

Vaativammat esimerkit ja tehtävät on merkitty väripohjalla.

Tämä kirja ei sisällä tutkimustehtäviä. Sen sijaan kirjassa on ylimääräisenä opetuskokonaisuutena geometrian osuus, jossa käsitellään kolmion ja suunnikkaan ala, sinilause ja kosinilause. Nämä on merkitty sivun reunassa olevalla väripalkilla. Ylimääräisen opetuskokonaisuuden voi käsitellä oppitunnilla tai sen voi jättää opiskelijan itse opiskeltavaksi.

Trigonometria

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija saa apuneuvoja jaksollisten ilmiöiden matemaattiseen käsittelyyn. **Sini, kosini ja tangentti määritellään kurssilla yksikköympyrän avulla. Lisäksi opitaan ratkaisemaan trigonometrisiä yhtälöitä.** Trigonometrisilla funktioilla mallinnetaan jaksollisia ilmiöitä, esimerkiksi vuorovesi-ilmiötä tai aaltoliikettä.

Vektorit

Toisena kurssin tavoitteena on, että opiskelija laajentaa käsitystään teknologisoituvassa yhteiskunnassa tarvittavasta matematiikasta. Monet vektoreiden käytännön sovellustilanteet liittyvät suunnan tai paikan määrittämiseen ja etäisyyden laskemiseen. Esimerkiksi pääilmansuunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Fysiikassa tarkastellaan voimien tasapainotilanteita vektoreita apuna käyttäen. Vektoreita käytetään myös monien geometristen ongelmien ratkaisemiseen.

Helsingissä tammikuussa 2007

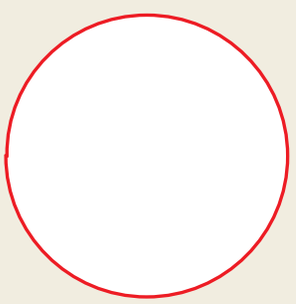
Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen

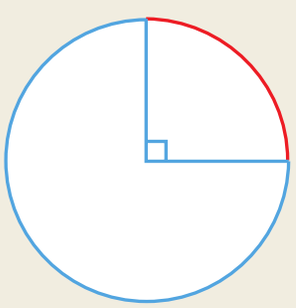
1 Trigonometriset funktiot

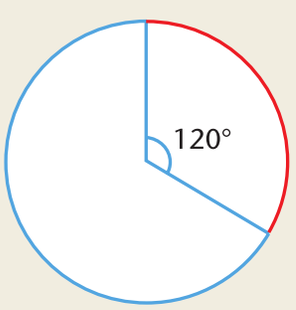
1.1 Erilaisia kulmia ja kulman yksiköitä

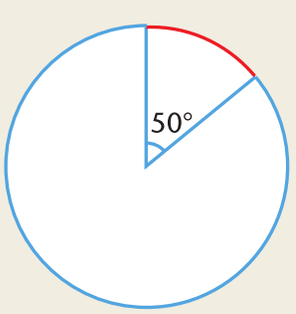
Pohdinta 1

Ympyrän kehän pituus p lasketaan kaavalla $p = 2\pi r$, jossa r on ympyrän säde. Laske punaisella merkityn osan pituus, kun $r = 1$.



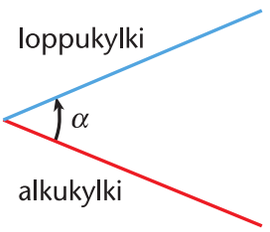






Suunnattu kulma

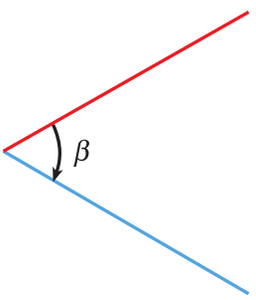
Kulma on geometrian keskeisiä käsitteitä. Sen voidaan ajatella syntyvän seuraavasti: kahdesta päällekkäin asetetusta puolisuorasta toinen jää paikalleen ja toista kierretään vastapäivään. Paikalleen jäävää puolisuoraa kutsutaan *alkukyljeksi* ja kierrettyä puolisuoraa taas *loppukyljeksi.*



$\alpha \approx 45°$

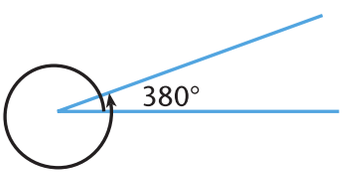
Näin on syntynyt *suunnattu kulma* α. Kulman suuruus ilmoitetaan useimmiten asteina. Kuvan kulma α on noin 45° astetta.

Kiertäminen voidaan tehdä myös myötäpäivään. Tällöin kulman asteluku on negatiivinen.



$\beta \approx -60°$

Kun kulman loppukylkeä kierretään täysi kierros vastapäivään, syntyy täysikulma, jonka asteluku on 360°. Kiertämistä voidaan vielä jatkaa. Jos esimerkiksi kierretään vielä 20° lisää, kulman asteluvuksi tulee $360° + 20° = 380°$.

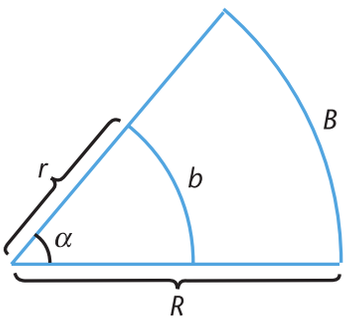


Kulman suuruudella ei siis ole ala- eikä ylärajaa.

Radiaani

Kulman suuruus voidaan ilmoittaa muidenkin yksiköiden kuin asteiden avulla, esimerkiksi radiaaneina. Radiaanin käsitettä on helppo lähestyä yhdenmuotoisuuden avulla.

Tarkastellaan kahta ympyräsektoria, joilla molemmilla on sama kärkipiste ja sama keskuskulma α.



Pienen sektorin kaaren pituus on b ja säde r. Isomman sektorin kaaren pituus on B ja säde R. Sektorit ovat yhdenmuotoiset, joten vastinosien suhteet ovat samat:

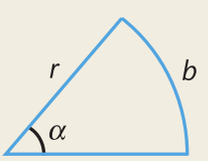
$$\frac{B}{b} = \frac{R}{r}$$

$$bR = Br$$ Kerrotaan ristiin.

$$\frac{b}{r} = \frac{B}{R}$$

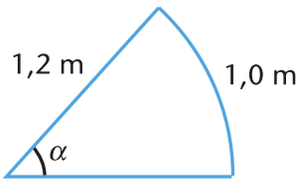
Kaaren ja säteen pituuksien suhde säilyy siis samana, vaikka sektoria suurennetaan kulman säilyessä ennallaan. Niinpä tämän suhteen arvo voidaan ottaa uudeksi kulmanyksiköksi, jolle on annettu nimeksi *radiaani* (rad).

RADIAANI $\alpha = \frac{b}{r}$

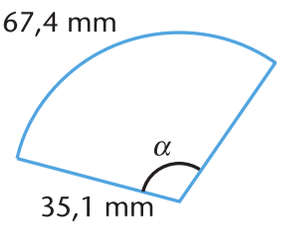


Esimerkki 1 Laske kulman α suuruus radiaaneina.

a)



b)



Ratkaisu

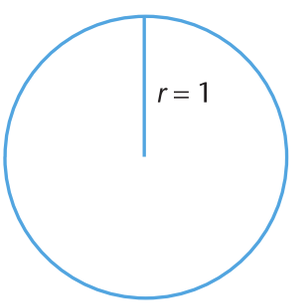
a) $\alpha = \dfrac{1{,}0\,\text{m}}{1{,}2\,\text{m}} = 0{,}8333\ldots\,(\text{rad}) \approx 0{,}83\,(\text{rad})$

b) $\alpha = \dfrac{67{,}4\,\text{mm}}{35{,}1\,\text{mm}} = 1{,}920\ldots\,(\text{rad}) \approx 1{,}92\,(\text{rad})$

Vastaus a) 0,83 (rad) b) 1,92 (rad)

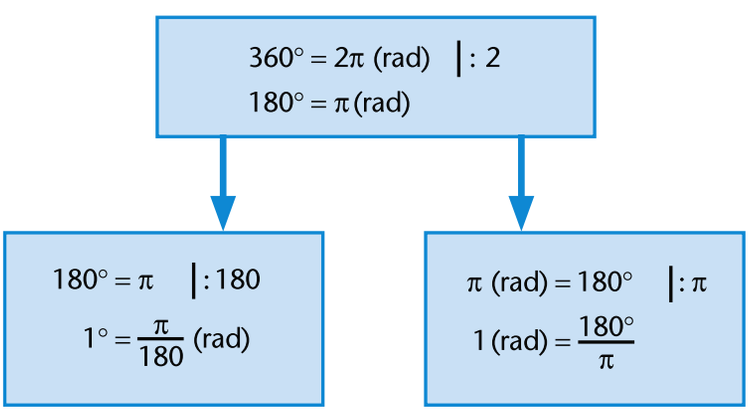
Tarkastellaan ympyrää, jonka säteen pituus on 1. Tällaista ympyrää kutsutaan *yksikköympyräksi.*

Yksikköympyrän koko kehän pituus on $2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Tällöin täysikulman suuruus radiaaneina on



$$\frac{2\pi}{1} = 2\pi \ \text{(rad)}.$$

Koska täysikulman suuruus asteina on 360°, on asteiden ja radiaanien välillä vastaavuus:



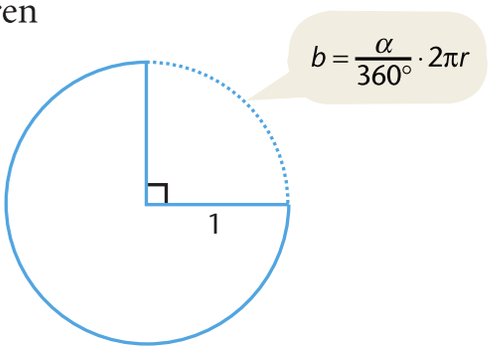
Yksikköympyrän avulla on helppo määrittää erikoiskulmien tarkkoja suuruuksia radiaaneina.

Koko ympyrän kehän pituus on 2π, jolloin katkoviivalla merkityn kaaren pituus on

$$\frac{90°}{360°} \cdot 2\pi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Koska sektorin keskuskulman suuruus asteina on 90°,

$$90° = \frac{\pi}{2}\,(\text{rad}) = 1{,}570...\,(\text{rad}).$$



Esimerkki 2 Muunna a) 260° radiaaneiksi b) 2,2 radiaania asteiksi. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu a) Koska $1° = \frac{\pi}{180}\,(\text{rad})$,

$$260° = 260 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{13\pi}{9} = 4{,}537... \approx 4{,}54\,(\text{rad}).$$

b) Koska $1\,(\text{rad}) = \frac{180°}{\pi}$,

$$2{,}2\,(\text{rad}) = 2{,}2 \cdot \frac{180°}{\pi} = 126{,}05...° \approx 126°.$$

Vastaus a) 4,54 b) 126°

Tehtäviä

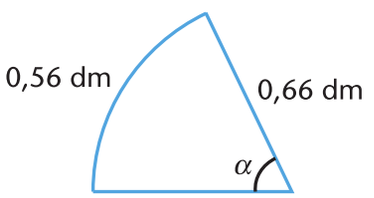
Suunnattu kulma

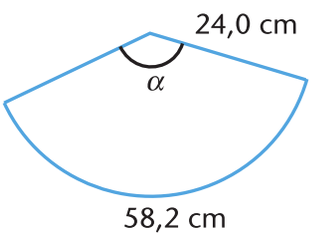
1. Eräät kassakaapit avataan pyörittämällä numeronvalitsinta joko myötä- tai vastapäivään sopivalla tavalla. Kuinka monta astetta henkilö kääntää valitsinta, kun hän pyörittää sitä
   a) 0,6 kierrosta vastapäivään
   b) 2,2 kierrosta vastapäivään
   c) 0,9 kierrosta myötäpäivään?

2. Kuinka monta astetta kellon minuuttiviisari liikkuu
   a) 15.00–15.20 b) 15.00–18.00
   välisenä aikana?

3. Soittorasia saadaan soimaan kiertämällä nuppia myötäpäivään viisi täyttä kierrosta sekä yksi neljännestä vajaa kierros. Kuinka monta astetta nuppia kierretään?

Radiaani

4. Laske kulmien suuruudet radiaaneina.
   a)
   

   b)
   

5. Ympyräsektorin suuruus on 1,80 (rad). Kuinka suuri on ympyrän säde, jos sektorin kaaren pituus on
   a) 52 cm b) 1,07 m?

6. Muunna asteet radiaaneiksi. Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
   a) 25° b) 240° c) 620°

7. Muunna radiaanit asteiksi. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
   a) 0,800 b) 1,14 c) 2,74

8. Määritä yksikköympyrän avulla seuraavien asteina ilmoitettujen kulmien suuruudet radiaaneina (tarkat arvot).
   a) 45° b) 270° c) 150°

9. Ympyräsektorin kaaren pituus on 6,2 cm. Kuinka suuri on sektorin keskuskulma, kun ympyrän kehän pituus on 32 cm? Anna vastaus sekä asteina että radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

10. Kulmanyksikkö aste jakaantuu minuutteihin ja sekunteihin. Yksi aste on 60 kulmaminuuttia eli $1° = 60'$. Vastaavasti yksi kulmaminuutti on 60 kulmasekuntia eli $1' = 60''$. Täydennä taulukkoon puuttuvat yksiköt.

Asteet	Kulmaminuutit ja -sekunnit	Radiaanit
30°		
	250′ 40″	
		3,8

Sekalaisia tehtäviä

11. Henkilö pyörähtää ensin puoli kierrosta vastapäivään, sitten 0,7 kierrosta myötäpäivään, sitten taas 1,1 kierrosta vastapäivään ja lopuksi 2,4 kierrosta myötäpäivään. Kuinka monta astetta hän on pyörähtänyt lähtöasemaan nähden?

12. Muunna asteet radiaaneiksi. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) 14,0° b) 285° c) 411°

13. Muunna radiaanit asteiksi. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) 0,160 b) 1,50 c) 6,00

14. Määritä yksikköympyrän avulla seuraavien asteiden tarkat arvot radiaaneina.
a) 300° b) 165° c) 315°

15. Ympyräsektorin keskuskulman suuruus on 1,0 radiaania. Laske sektorin kaaren pituus, kun
a) ympyrän kehä on 240 cm
b) ympyrän ala on 450 cm^2.

16. Suorakulmaisen kolmion toinen terävistä kulmista on $\frac{\pi}{12}$. Määritä muiden kulmien tarkat arvot radiaaneina.

1.2 Sini, kosini ja tangentti

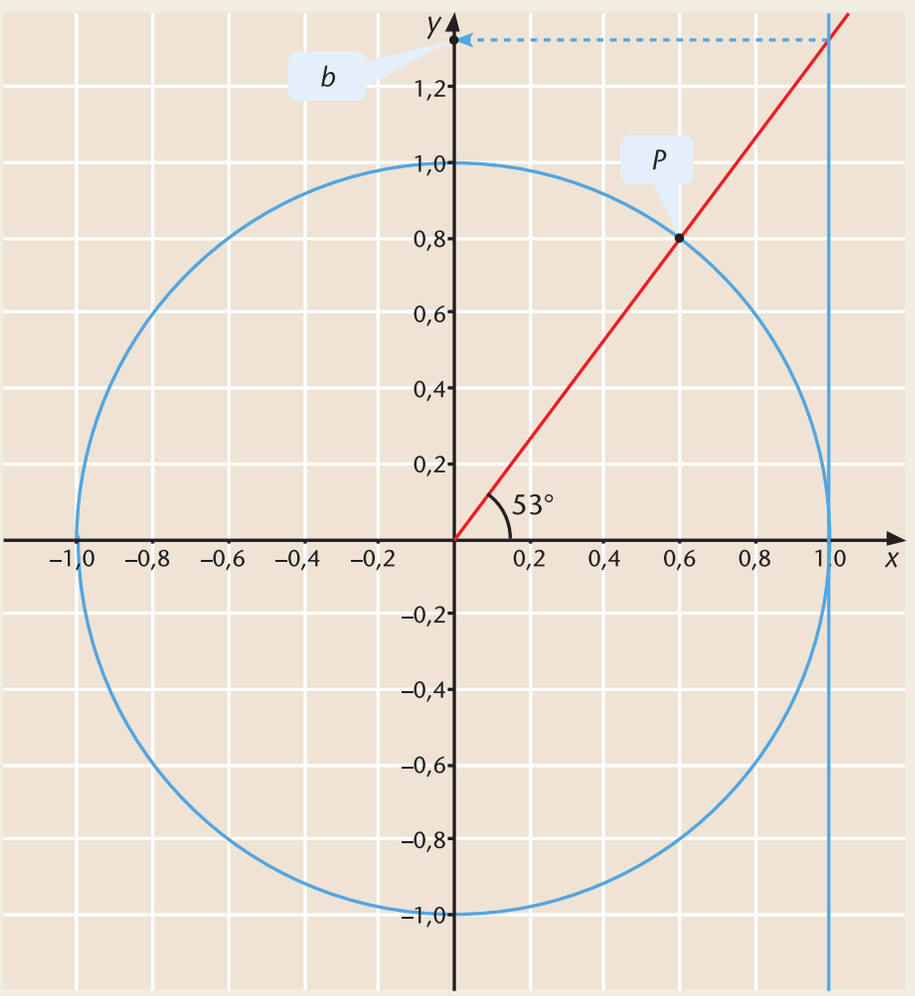
POHDINTA 1 Kuvaan on piirretty 53° kulma. Laske laskimella yhden desimaalin tarkkuudella

a) $\sin 53°$

b) $\cos 53°$

c) $\tan 53°$.

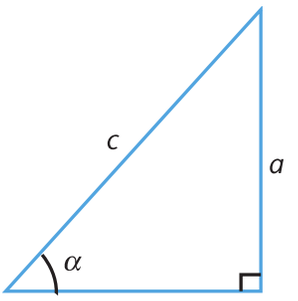
Määritä kuvasta pisteen P koordinaatit sekä y-akselin arvo b yhden desimaalin tarkkudella. Vertaa näitä edellä laskettuihin tuloksiin. Mitä havaitset?



Sini

Geometrian kurssilla sini määriteltiin suorakulmaisen kolmion avulla seuraavasti: kulman sini on kolmion vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$



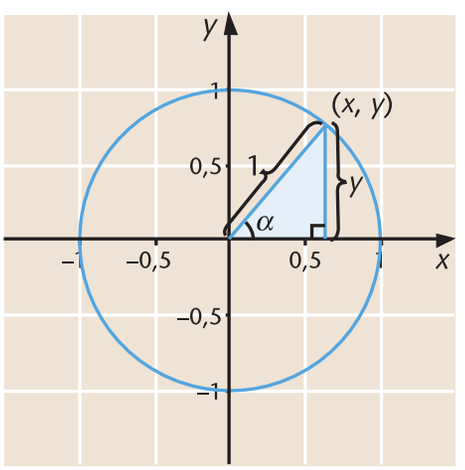
Tarkastellaan yksikköympyrää, joka on piirretty koordinaatistoon. Ympyrän keskipiste sijaitsee origossa. Sijoitetaan ympyrän sisälle suorakulmainen kolmio. Tutkitaan siniä ympyrässä kolmion avulla.

Suorakulmaisen kolmion yksi kärkipiste sijaitsee yksikköympyrän kehällä ja yksi origossa. Kolmion hypotenuusa on siis säteen pituinen eli 1. Kehällä sijaitseva kärkipiste on (x, y). Niinpä kulman α vastaisen kateetin pituus on y.

Kulman α sini on tällöin

$$\sin\alpha = \frac{y}{1}$$

$$\sin\alpha = y$$



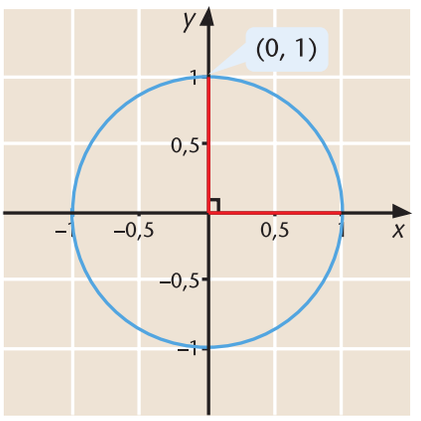
Sinin arvo on siis yksikköympyrän kehäpisteen y-koordinaatti. Tämän määrittelyn ansiosta voimme määrittää sinin myös yli 90° kulmille.

ESIMERKKI 1 Määritä yksikköympyrän avulla

a) $\sin\frac{\pi}{2}$ b) $\sin\frac{\pi}{3}$ c) $\sin\frac{2\pi}{3}$.

RATKAISU

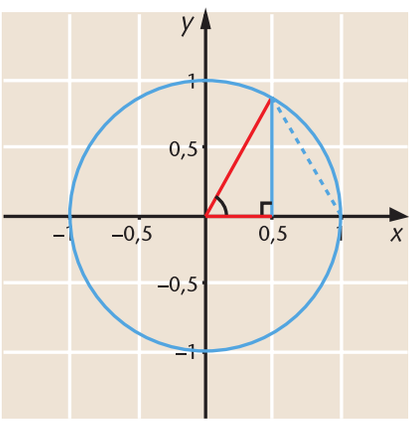
a) Koska $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{180°}{\pi} = 90°$, kyseessä on suora kulma.



Kuvasta nähdään, että kehäpiste on (0, 1). Koska sinin arvo on kehäpisteen y-koordinaatti,

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

b) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{180°}{\pi} = 60°$



Piirretään yksikköympyrän sisään suorakulmainen kolmio, jonka toinen terävä kulma on 60°. Tämä kolmio on puolet tasasivuisesta kolmiosta. Sinisellä merkitty jana on tasasivuisen kolmion korkeus. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on sama kuin yksikköympyrän säde eli 1.

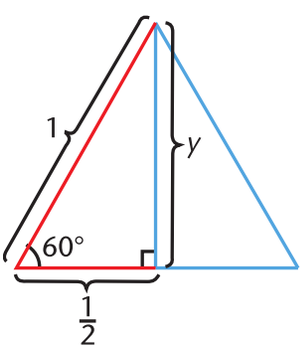
Ratkaistaan korkeus y Pythagoraan lauseen avulla:

$$y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$y^2 + \frac{1}{4} = 1$$

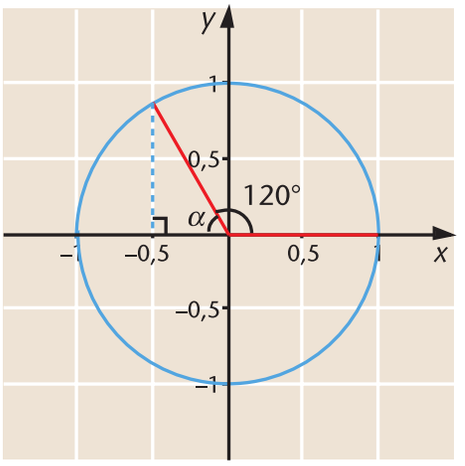
$$y^2 = \frac{3}{4}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \pm 0{,}8660...$$



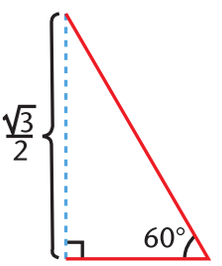
Kuvasta nähdään, että kehäpisteen y-koordinaatti on positiivinen eli $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tällöin $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660... \approx 0{,}87$.

c) $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$



120 asteen kulma ja α muodostavat yhdessä oikokulman eli $\alpha = 180° - 120° = 60°$. Näin 120° kulman viereen voidaan muodostaa suorakulmainen kolmio, joka on b-kohdan kolmion peilikuva y-akselin suhteen. Tämän kolmion korkeus on sama kuin edellä, joten kehäpisteen y-koordinaatti on myös sama.

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660... \approx 0,87$$

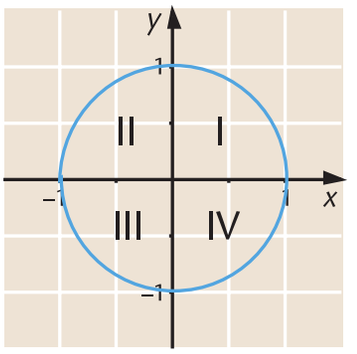


VASTAUS a) $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ b) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$ c) $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$

Taulukkokirjaan on laskettu sinin tarkkoja arvoja eräille kulmille. Arvoja voi laskea myös laskimen avulla. Laskinta käytettäessä on aina tarkistettava, missä tilassa laskin on. Jos kulman yksikkönä käytetään radiaaneja, on laskin asetettava RAD-tilaan. Taulukossa on esitetty joitakin sinin tarkkoja arvoja.

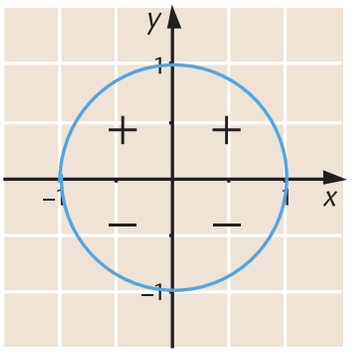
Kulma		
asteina	radiaaneina	Sinin arvo
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707...$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
180	π	0
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,8660...$
330	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$

Yksikköympyrä voidaan jakaa neljään osaan, joita kutsutaan *neljänneksiksi.*



Sinin arvo on positiivinen tai negatiivinen riippuen siitä, mihin neljännekseen kulma sijoittuu.

Koska kehäpisteen *y*-koordinaatti on positiivinen kahdessa ensimmäisessä (I ja II) neljänneksessä, myös sinin arvo on positiivinen.

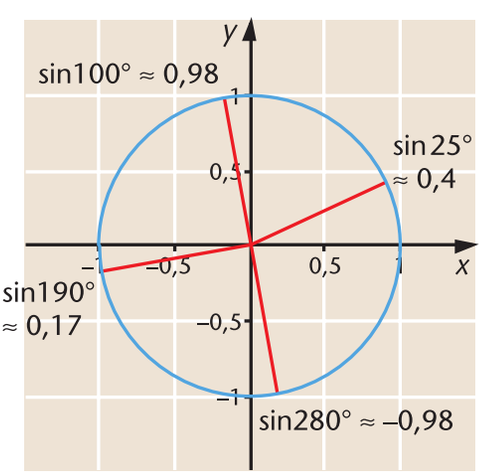


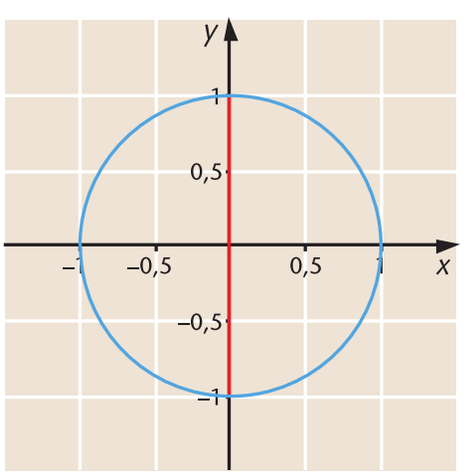
Kahdessa viimeisessä neljänneksessä (III ja IV) *y*-koordinaatti on negatiivinen, joten sini saa negatiivisia arvoja.

Sinin merkin voi tarkistaa laskemalla laskimella sopivien kulmien arvoja.

Neljännes	Kulma	Sinin arvo
I	25°	sin25° ≈ 0,42
II	100°	sin100° ≈ 0,98
III	190°	sin190° ≈ –0,17
IV	280°	sin280° ≈ –0,98

Yksikköympyrän kehäpisteen *y*-koordinaatin suurin arvo on 1 ja pienin mahdollinen arvo –1. Näin ollen sinin arvo vaihtelee välillä [–1, 1].

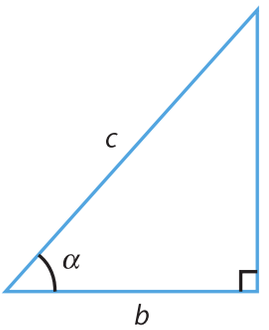




Kosini

Myös kosini määriteltiin suorakulmaisen kolmion avulla. Se on kulman viereisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.

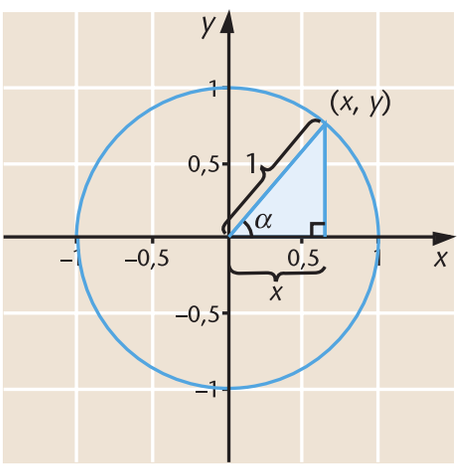
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$



Määritellään nyt kosini yksikköympyrässä vastaavalla tavalla kuin sini. Kulman α viereisen kateetin pituus on x. Kulman α kosini on siis

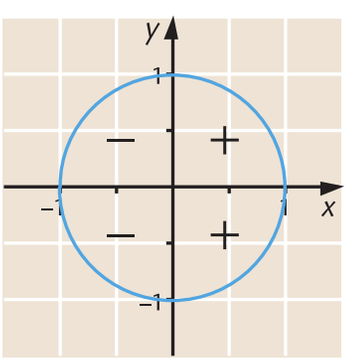
$$\cos\alpha = \frac{x}{1}$$

$$\cos\alpha = x$$



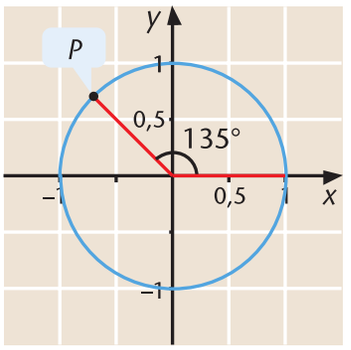
Kosinin arvo on yksikköympyrän kehäpisteen x-koordinaatti. Niinpä kosinin määritelmä voidaan laajentaa koskemaan kaikensuuruisia kulmia.

Myös kosini voi saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Koska kehäpisteen x-koordinaatti saa positiivia arvoja ensimmäisessä ja neljännessä neljänneksessä, on kosinin arvo tällöin positiivinen. Toisessa ja kolmannessa neljänneksessä kosini on negatiivinen.

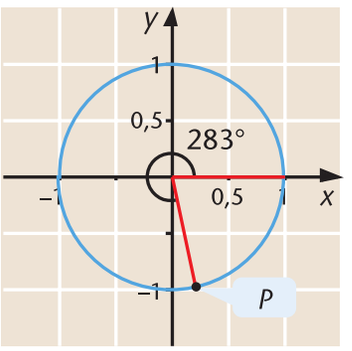


ESIMERKKI 2 Laske pisteen P koordinaatit kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

a)



b)



RATKAISU

a) Pisteen P koordinaatit saadaan laskemalla laskimen avulla kulman kosini ja sini.

x-koordinaatti: $\cos 135° = -0{,}7071\ldots \approx -0{,}71$
y-koordinaatti: $\sin 135° = 0{,}7071\ldots \approx 0{,}71$

Piste P on siis $(-0{,}71;\ 0{,}71)$.

Kun lasket asteilla, tarkista, että laskimesi on DEG-tilassa.

b) x-koordinaatti: $\cos 283° = 0{,}2249\ldots \approx 0{,}22$
y-koordinaatti: $\sin 283° = -0{,}9743\ldots \approx -0{,}97$

Piste P on siis $(0{,}22;\ -0{,}97)$.

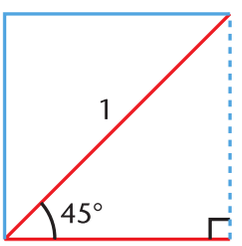
VASTAUS a) $P = (-0{,}71;\ 0{,}71)$ b) $P = (0{,}22;\ -0{,}97)$

ESIMERKKI 3 Määritä yksikköympyrän avulla kulmien

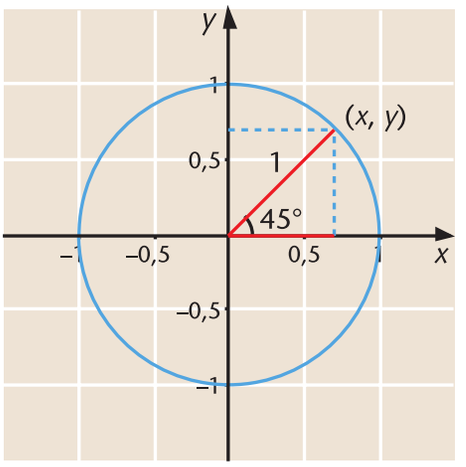
a) $45°$ b) $\frac{2\pi}{3}$ kosinin tarkka arvo.

RATKAISU

a) Neliön lävistäjä jakaa neliön kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Suorakulmaisten kolmioiden terävät kulmat ovat $45°$.



Neliön sivut ovat yhtä pitkät, joten kehäpisteen koordinaatit ovat yhtä suuret eli $y = x$.



Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

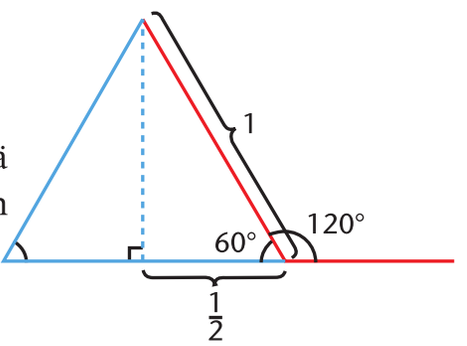
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kulma 45° sijaitsee ensimmäisessä neljänneksessä, jossa kosinin arvo on positiivinen.

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

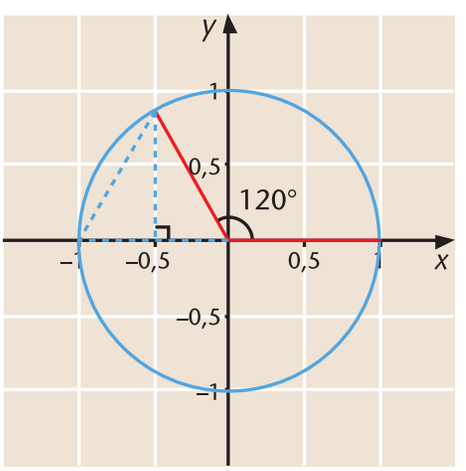
b) $\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 120°$

120° kulma muodostaa yhdessä 60° kulman kanssa oikokulman (katso Esimerkki 1c).



Kulma 120° sijaitsee toisessa neljänneksessä, jossa kosinin arvot ovat negatiivisia.

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



VASTAUS a) $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Tangentti

Suorakulmaisessa kolmiossa tangentti on vastaisen kateetin ja viereisen kateetin pituuksien suhde eli $\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad | \cdot c$

$b = c \cdot \cos\alpha$

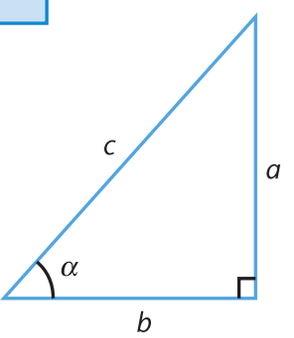
$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad | \cdot c$

$a = c \cdot \sin\alpha$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$\tan\alpha = \frac{c \cdot \sin\alpha}{c \cdot \cos\alpha}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



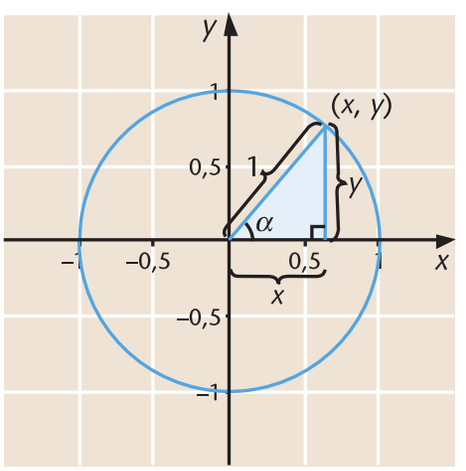
Tangentti voidaan määritellä samalla tavalla myös yksikköympyrässä:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\sin\alpha = y$$

$$\cos\alpha = x$$

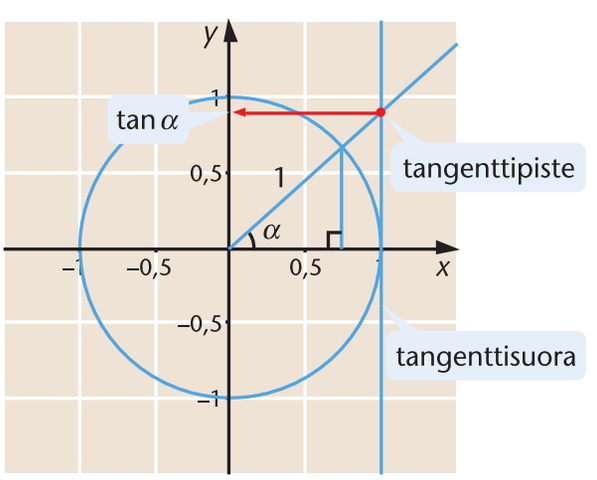
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Yksikköympyrässä tangentille saadaan myös geometrinen tulkinta. Piirretään ympyrälle tangenttisuora pisteeseen (1, 0). Jatketaan sitten kulman α vasenta kylkeä siten, että se leikkaa tangenttisuoran.

Kyljen ja tangenttisuoran leikkauspistettä sanotaan *tangenttipisteeksi*.

Kulman α tangentti on tämän pisteen y-koordinaatti.



Kun kulma α lähestyy 90°:a, tangenttipiste siirtyy ylemmäksi ja näin tangentin arvo kasvaa. Tangentilla ei siis ole suurinta arvoa. Jos kulma α lähestyy –90°:a, tangentin arvo pienenee rajatta eli tangentilla ei ole myöskään pienintä arvoa.

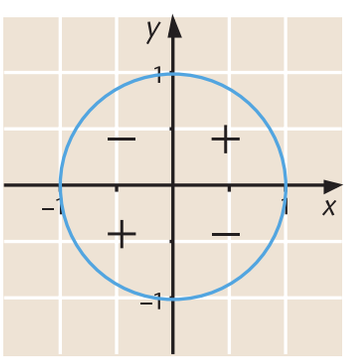
Määritelmän mukaan $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Jos kulma saa arvon 90°, tangenttia ei enää voida määrittää, koska $\cos 90° = 0$ eikä luvulla nolla voi jakaa. Samaan tilanteeseen päädytään, jos kulma on 270°. Itse asiassa kosini saa arvon nolla aina 180° välein alkaen arvosta 90°. Ehto tangentille voidaankin kirjoittaa muodossa

$$\cos\alpha \neq 0$$
$$\alpha \neq 90° + n \cdot 180°, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Tangentin merkki eri neljänneksissä voidaan määrittää sinin ja kosinin merkin avulla.

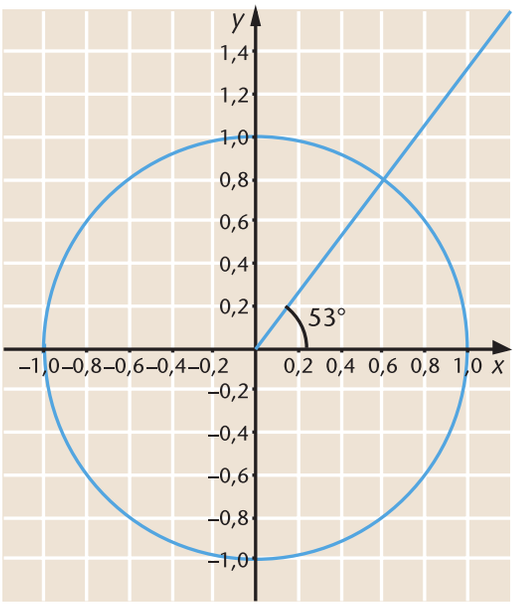
Neljännes	Sini	Kosini	$\frac{\text{sin}}{\text{kosini}}$ = tangentti
I	+	+	+
II	+	–	–
III	–	–	+
IV	–	+	–



ESIMERKKI 4

Määritä kuvan avulla
a) $\sin 53°$
b) $\cos 53°$
c) $\tan 53°$.

Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



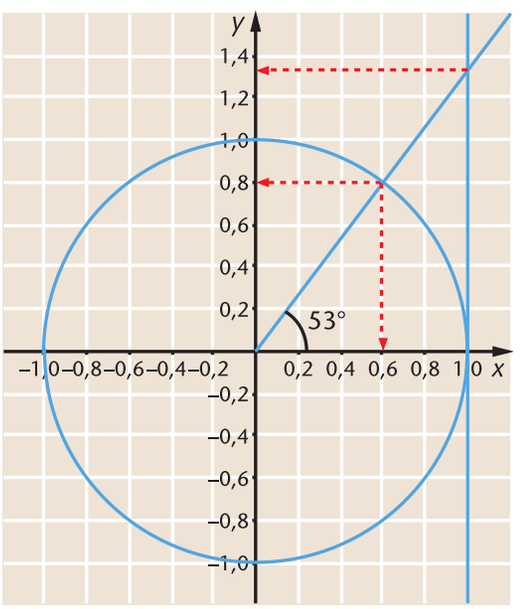
RATKAISU

a) Sinin arvo on kulmaa vastaavan kehäpisteen y-koordinaatti. Tälle kulmalle se on likimain 0,8 eli

$$\sin 53° \approx 0{,}8.$$

b) Kosinin arvo on kehäpisteen x-koordinaatti, joka on likimain 0,6 eli

$$\cos 53° \approx 0{,}6.$$



c) Tangentin arvon määrittämiseksi kuvaan on piirrettävä tangentti pisteeseen $(1, 0)$. Tarkasteltavan kulman vasen kylki ja tangenttisuoran leikkauspisteen y-koordinaatti kertovat tangentin arvon. Se on likimain 1,3 eli

$$\tan 53° \approx 1{,}3.$$

Samaan tulokseen päädytään myös, jos tangentti määritellään sinin ja kosinin arvojen avulla:

$$\tan 53° = \frac{\sin 53°}{\cos 53°} = \frac{0{,}8}{0{,}6} \approx 1{,}3.$$

VASTAUS

a) $\sin 53° \approx 0{,}8$ b) $\cos 53° \approx 0{,}6$ c) $\tan 53° \approx 1{,}3$

ESIMERKKI 5 Määritä laskimen avulla kaksidesimaaliset likiarvot lausekkeille
a) $\tan 195°$ b) $\tan 1{,}86$.

RATKAISU

a) Koska kulma on annettu asteina, laskin on asetettava DEG-tilaan.

$$\tan 195° = 0{,}2679\ldots \approx 0{,}27$$

b) Kulma on annettu radiaaneina, joten laskin on asetettava RAD-tilaan.

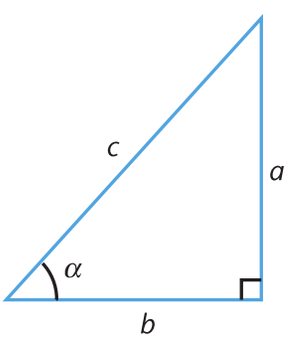
$$\tan 1{,}86 = -3{,}3608\ldots \approx -3{,}36$$

VASTAUS a) 0,27 b) –3,36

ESIMERKKI 6 Osoita suorakulmaisen kolmion avulla, että $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Määritä tätä hyväksi käyttäen $\cos\frac{2\pi}{3}$:n ja $\tan\frac{2\pi}{3}$:n tarkat arvot, kun tiedetään, että $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

RATKAISU Määritelmän mukaan $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ ja $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

$$\begin{aligned}(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2}\end{aligned}$$

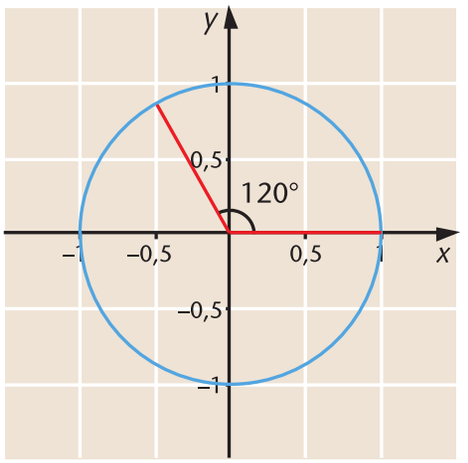


Pythagoraan lauseen mukaan $a^2 + b^2 = c^2$. Tällöin

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Kulmaa $\frac{2\pi}{3} = 120°$ vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän toisessa neljänneksessä.

Sijoitetaan $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ yhtälöön



$$\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 1.$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 1$$

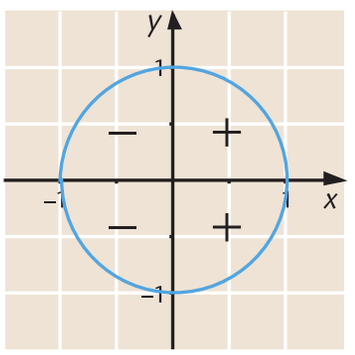
$$\frac{3}{4} + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 1$$

Ratkaistaan yhtälöstä $\cos\frac{2\pi}{3}$:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Toisessa neljänneksessä kosinin arvo on negatiivinen, joten

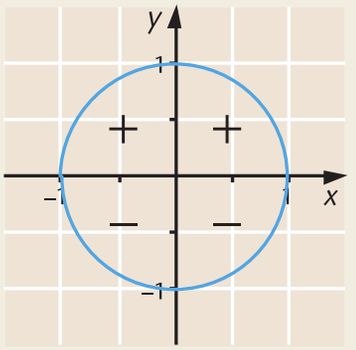
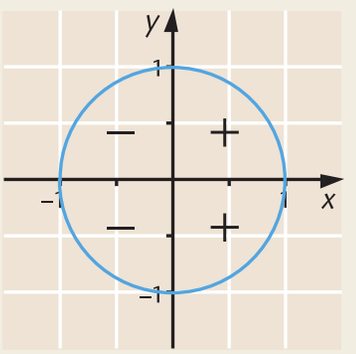
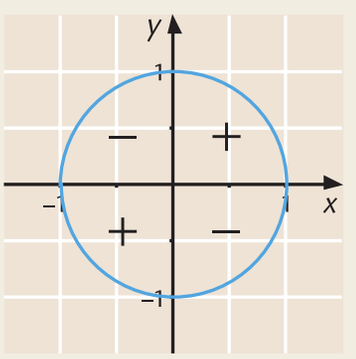


$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Tangentin arvo saadaan sijoittamalla sinin ja kosinin arvot:

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{2}{1}\right) = -\sqrt{3}.$$

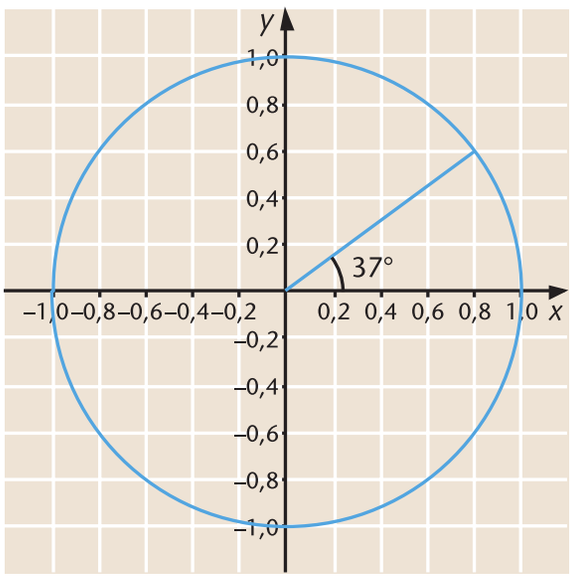
VASTAUS $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ja $\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Trigonometrinen funktio	Arvon määritys yksikköympyrässä	Merkki yksikköympyrässä
Sini	Yksikköympyrässä sinin arvo on sama kuin kehäpisteen y-koordinaatti. $\sin\alpha = y$	
Kosini	Yksikköympyrässä kosinin arvo on sama kuin kehäpisteen x-koordinaatti. $\cos\alpha = x$	
Tangentti	Tangentin arvo voidaan määrittää yksikköympyrässä kehäpisteiden koordinaattien eli sinin ja kosinin arvojen avulla. $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	

Tehtäviä

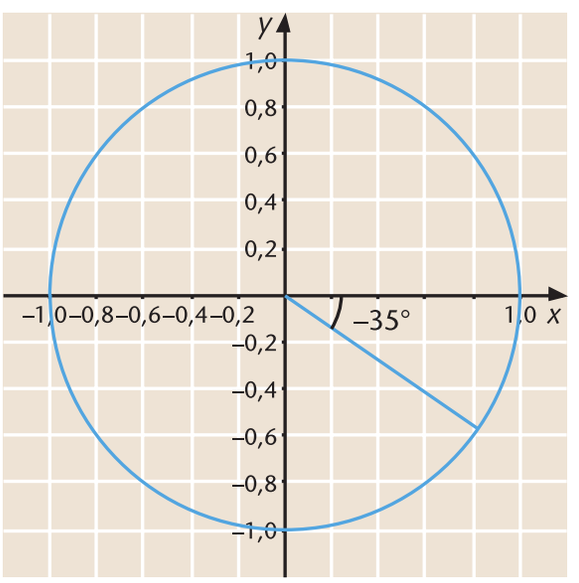
Sini

17. Määritä kuvan avulla
    a) sin 37°
    b) sin 143°
    c) sin 217°.
    Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



18. Määritä laskimen avulla
    a) sin 85°
    b) sin 220°
    c) sin 2,0
    d) sin 3,1.

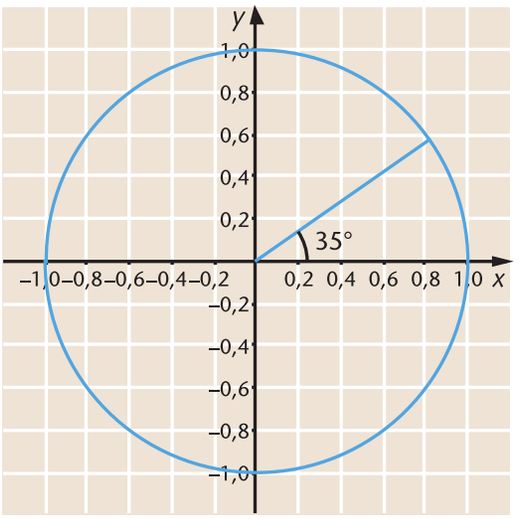
19. Määritä kuvan avulla
    a) sin (–35°)
    b) sin (–145°)
    c) sin (–215°).
    Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



20. Kulmasta β tiedetään, että
    a) $\sin\beta = 0{,}35$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän toisessa neljänneksessä
    b) $\sin\beta = -0{,}65$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän kolmannessa neljänneksessä.
    Määritä kulma β graafisesti yksikköympyrän avulla asteen tarkkuudella. Tarkista tuloksesi laskimella.

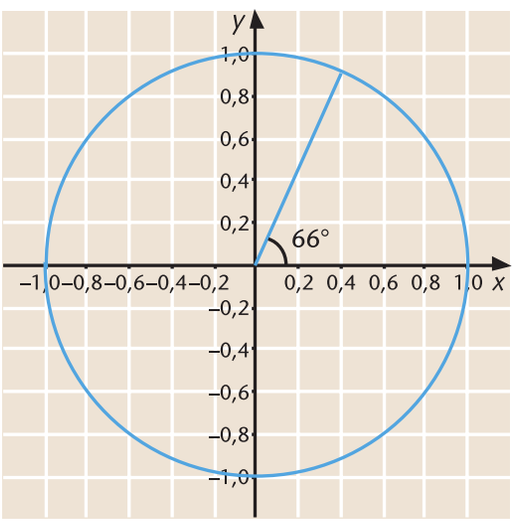
21. Määritä yksikköympyrän ja suorakulmaisen kolmion avulla tarkka arvo lausekkeelle
    a) $\sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{5\pi}{6}$ c) $\sin\frac{5\pi}{3}$.

22. Määritä yksikköympyrän avulla $\sin\alpha$, kun $\alpha = 35°$. Määritä lisäksi $2\sin\alpha$ ja $\sin 2\alpha$. Anna vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.



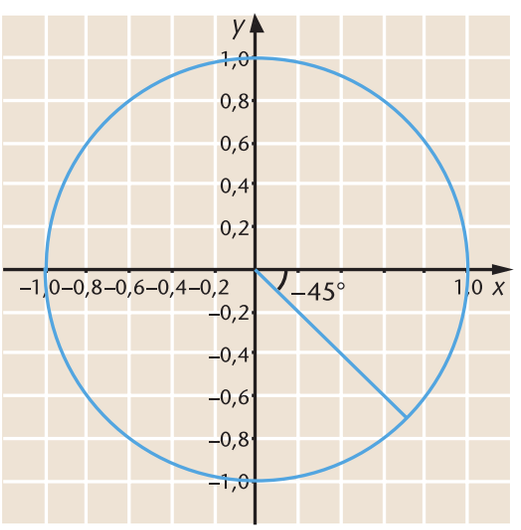
Kosini

23. Määritä kuvaajan avulla
a) $\cos 66°$
b) $\cos 294°$
c) $\cos 246°$.
Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



24. Määritä laskimen avulla
a) $\cos 43°$
b) $\cos 118°$
c) $\cos 0{,}56$
d) $\cos 2{,}40$.

25. Määritä yksikköympyrän avulla
a) $\cos(-45°)$
b) $\cos 45°$
c) $\cos(-135°)$.
Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



26. Määritä yksikköympyrän ja suorakulmaisen kolmion avulla tarkka arvo lausekkeelle

a) $\cos\frac{\pi}{2}$ b) $\cos\frac{\pi}{4}$.

27. Kolmion kulmat ovat x, $2x$ ja $3x$. Laske lausekkeiden $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$ ja $\cos(x + 2x + 3x)$ tarkat arvot taulukkokirjan avulla.

28. Sinille ja kosinille on voimassa yhtälö $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Ratkaise tästä kaavasta $\cos x$. Laske sen avulla lausekkeen $\cos 60°$ tarkka arvo, kun tiedetään, että

$$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

29. Sinille ja kosinille on voimassa summakaava

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Sovella summakaavaa lausekkeeseen $\sin 390°$ hajottamalla kulma sopivaksi summaksi ja laske taulukkokirjan tarkkojen arvojen avulla lausekkeen $\sin 390°$ tarkka arvo. Voit tarkistaa tuloksen laskimella.

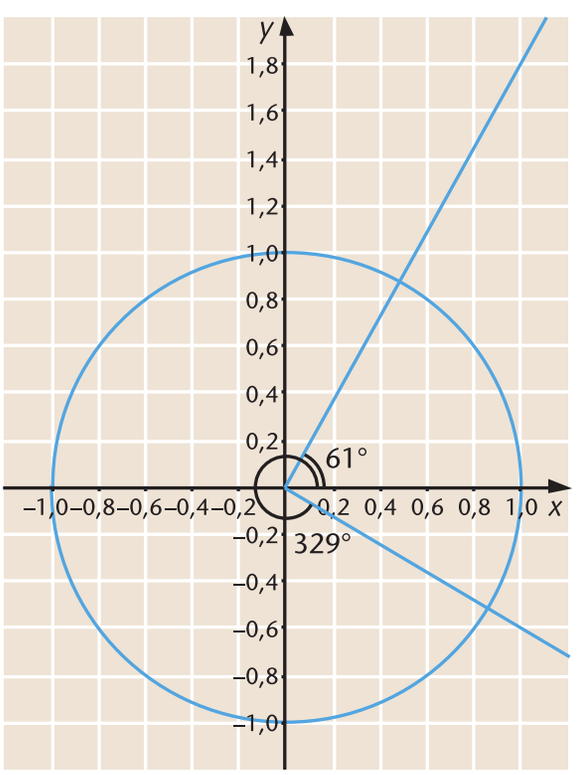
30. Kulmasta β tiedetään, että
   a) $\cos \beta = 0{,}65$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä
   b) $\cos \beta = 0{,}77$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän neljännessä neljänneksessä.

   Määritä kulma β graafisesti asteina yksikköympyrän avulla kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Tarkista tuloksesi laskimella.

Tangentti

31. Määritä kuvaajan avulla
   a) $\tan 61°$
   b) $\tan 329°$.

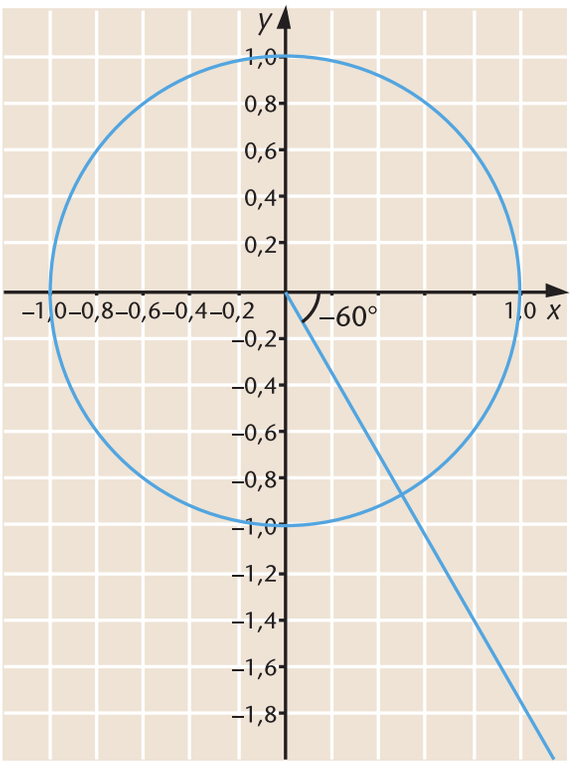
   Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



32. Määritä laskimen avulla
   a) $\tan 42°$
   b) $\tan 290°$
   c) $\tan 0{,}75$
   d) $\tan 2{,}40$.

   Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

33. Määritä yksikköympyrän avulla
a) $\tan(-60°)$
b) $\tan 60°$
c) $\tan 120°$.
Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.



34. Määritä tarkka arvo lausekkeelle $\tan\alpha$, kun

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ja

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ ja

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

35. Kulmasta α tiedetään, että
a) $\tan\alpha = -1{,}7$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän toisessa neljänneksessä
b) $\tan\alpha = 0{,}47$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän ensimmäisessä neljänneksessä.
Määritä kulma α graafisesti yksikköympyrän avulla asteen tarkkuudella. Tarkista tuloksesi laskimella.

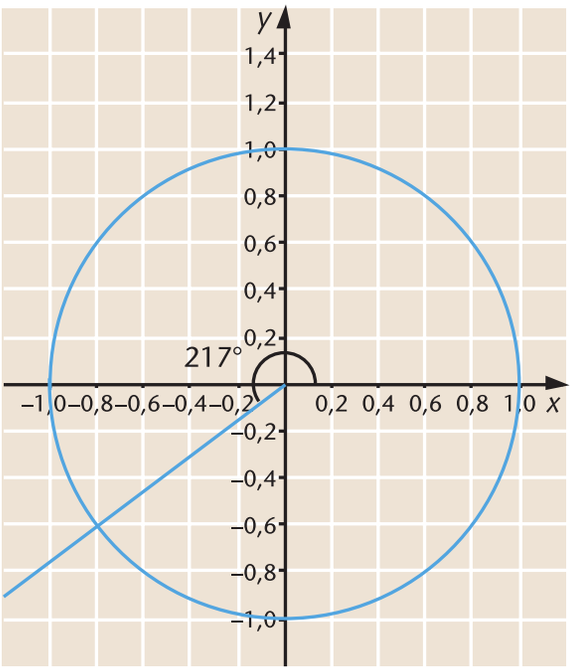
36. Laske $\cos(-30°)$ tarkka arvo, kun $\tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\sin(-30°) = -\frac{1}{2}$.

37. Laske tarkka arvo lausekkeille $\tan\frac{3\pi}{4}$ ja $\sin\frac{3\pi}{4}$, kun $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Käytä hyväksesi yhtälöä $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

38. Tylpän kulman α sini on $\frac{3}{5}$. Määritä $\tan\alpha$ tarkka arvo, kun $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ja $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

Sekalaisia tehtäviä

39. Määritä kuvan avulla yhden desimaalin tarkkuudella
a) $\sin 217°$
b) $\cos 217°$
c) $\tan 217°$.



40. Laske laskimen avulla likiarvo kahden merkitsevän numeron tarkkuudella lausekkeelle
a) $\sin 15°$
b) $\cos 1{,}3$
c) $\tan 12{,}1$.

41. Määritä lausekkeiden $\cos\frac{5\pi}{4}$ ja $\tan\frac{5\pi}{4}$ tarkat arvot, kun $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

42. Trigonometrisille funktioille on voimassa yhtälö

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Määritä yhtälön avulla $\tan 30°$, kun tiedetään, että $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

43. Kulmasta β tiedetään, että
a) $\sin\beta = 0{,}65$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän toisessa neljänneksessä
b) $\tan\beta = -2{,}7$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän toisessa neljänneksessä.
Määritä kulma β graafisesti yksikköympyrän avulla asteen tarkkuudella.

44. Missä neljänneksissä taulukon kulmat sijaitsevat?

Kulma	210°	70°	300°	130°	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
Sijainti								

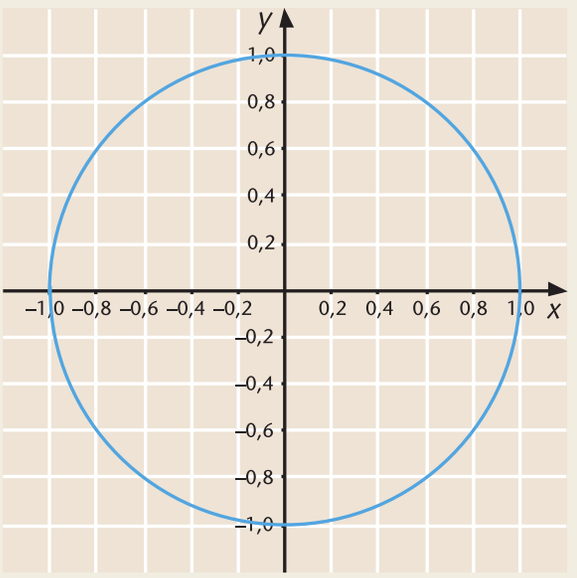
2 Trigonometriset yhtälöt

2.1 Siniyhtälö

Pohdinta 1

Välillä $[0°, 360°]$ on kaksi sellaista kulmaa, joiden sini on 0,6. Piirrä kulmat ja mittaa ne astemitalla.

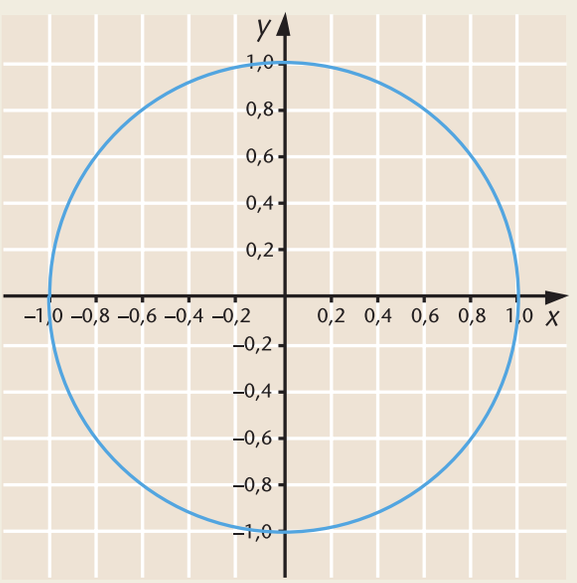
Mikä yhteys näiden kulmien välillä näyttäisi olevan?



Pohdinta 2

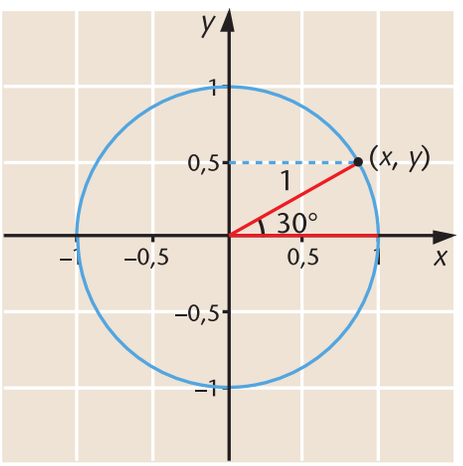
Välillä $[0°, 360°]$ on kaksi sellaista kulmaa, joiden sini on –0,8. Piirrä kulmat ja mittaa ne astemitalla.

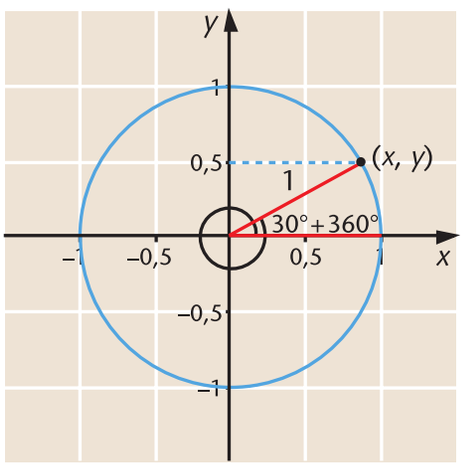
Mikä yhteys näiden kulmien välillä näyttäisi olevan?



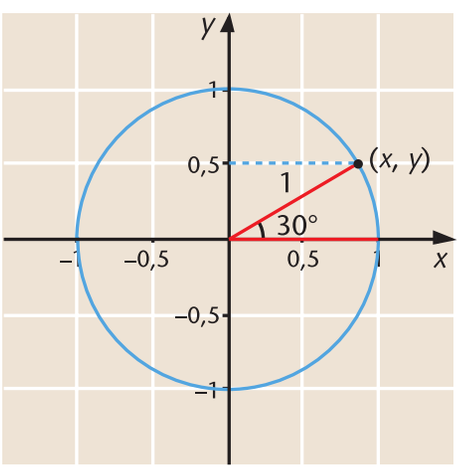
Edellisessä luvussa sini määriteltiin yksikköympyrän avulla kehäpisteen y-koordinaatiksi. Niinpä esimerkiksi 30° kulman siniä vastaa y-akselin arvo 0,5.

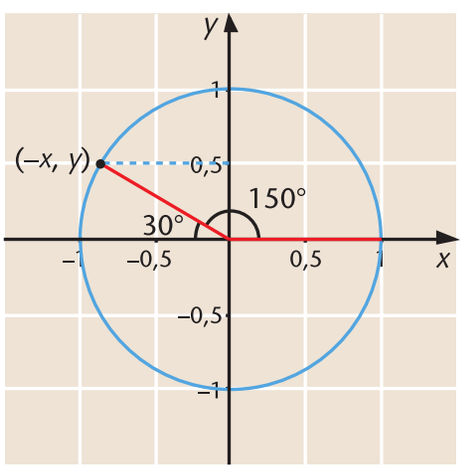
Jos 30° kulmaan lisätään 360° eli täysikulma, päädytään takaisin samaan kehäpisteeseen eli $\sin 360° = 0{,}5$. Sinin arvo 0,5 toistuu näin aina 360° välein.



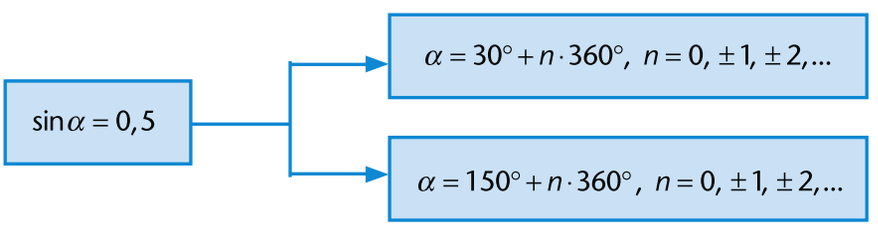


Peilataan 30° kulman loppukylki y-akselin suhteen. Tällöin muodostuu 150° kulma. Myös tälle kulmalle sinin arvo on 0,5.



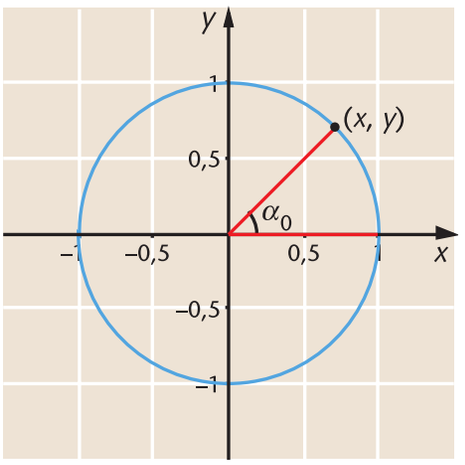


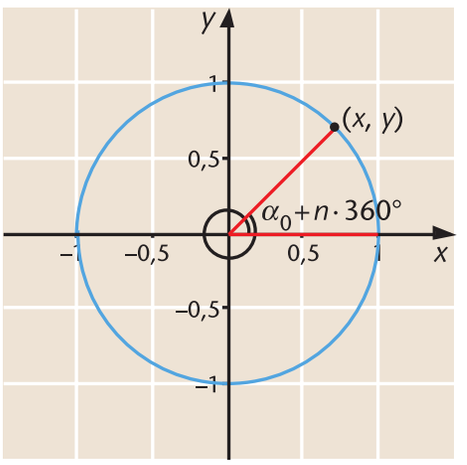
Kulmat 30° ja 150° ovat toistensa *suplementtikulmia*. Ne muodostavat yhdessä oikokulman. Jos 150° kulmaan lisätään 360°, päädytään samaan kehäpisteeseen. Sinin arvoa 0,5 vastaa siis äärettömän monta erilaista kulmaa α:

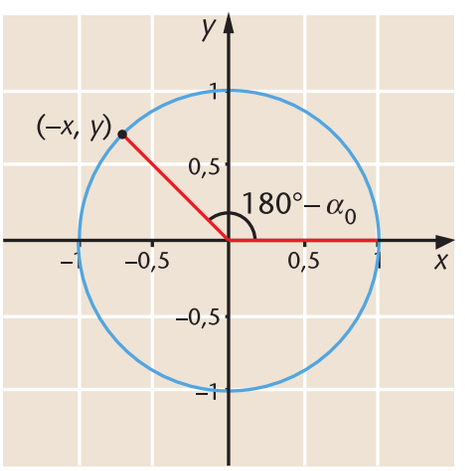


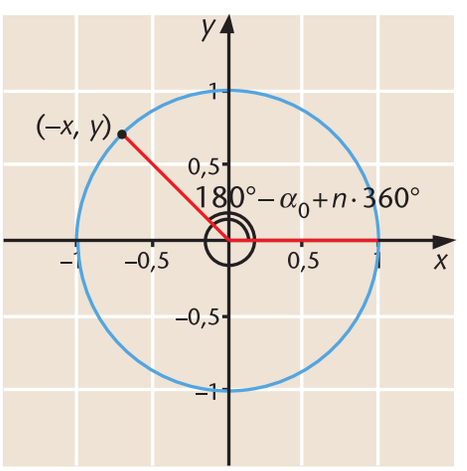
Tarkastellaan nyt sellaista alle 90° kulmaa α_0, jonka sinin arvo on y eli $\sin\alpha_0 = y$.

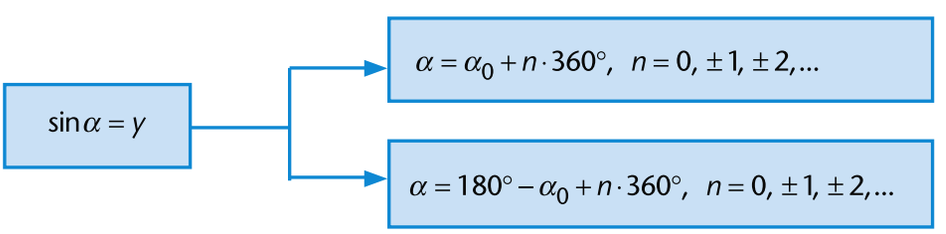
Kulman α_0 avulla voidaan lyhyesti esittää kaikki yhtälön $\sin\alpha = y$ ratkaisut:











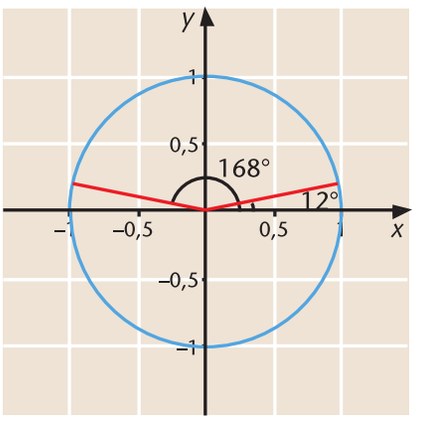
Esimerkki 1 Ratkaise kulma β asteen tarkkuudella.

a) $\sin\beta = 0{,}21$ b) $\sin\beta = 0{,}821$

Ratkaisu

a) On etsittävä kaikki ne kulmat, joiden sini on 0,21. Ratkaisut saadaan laskimen toiminnolla $\sin^{-1}$:

$$\sin\beta = 0{,}21$$
$$\beta = 12{,}1223...^\circ + n \cdot 360^\circ$$
$$\beta \approx 12^\circ + n \cdot 360^\circ$$



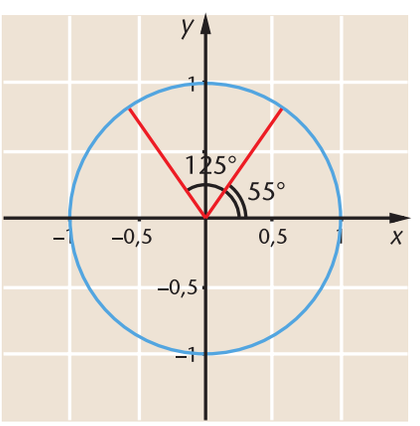
Yhtälön muut ratkaisut ovat saatujen kulmien suplementtikulmia:

$$\beta = (180 - 12{,}1223...)^\circ + n \cdot 360^\circ$$
$$\beta \approx 168^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

b) Laskimella yhtälön $\sin\beta = 0{,}821$ ratkaisuiksi saadaan

$$\beta = 55{,}185...^\circ + n \cdot 360^\circ$$
$$\beta \approx 55^\circ + n \cdot 360^\circ$$



Muut ratkaisut ovat suplementtikulmia:

$$\beta = (180 - 55{,}185...)^\circ + n \cdot 360^\circ$$
$$\beta \approx 125^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Vastaus

a) $\beta \approx 12^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $\beta \approx 168^\circ + n \cdot 360^\circ$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

b) $\beta \approx 55^\circ + n \cdot 360^\circ$ tai $\beta \approx 125^\circ + n \cdot 360^\circ$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Esimerkki 2

Määritä taulukkokirjan avulla yhtälön $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ratkaisuista ne, jotka kuuluvat välille $[0, 2\pi]$.

Ratkaisu

Taulukkokirjassa on joidenkin kulmien trigonometristen funktioiden tarkkoja arvoja. Etsitään taulukkokirjasta kulma, jonka sinin arvo on $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

Suplementtikulmat ovat

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Koska tarkasteltava väli on annettu radiaaneina, on ratkaisu ilmoitettava radiaaneina.

Ratkaisuista välillä $[0, 2\pi]$ ovat juuret $\frac{\pi}{3}$ ja $\frac{2\pi}{3}$.

Vastaus

Ratkaisut ovat $\frac{\pi}{3}$ ja $\frac{2\pi}{3}$.

Esimerkki 3

Ratkaise yhtälö $\sin 2x = 0{,}70$. Ilmoita vastaus radiaaneina.

Ratkaisu

Määritetään ensin, mitä kulmaa vastaa sinin arvo 0,70. Koska ratkaisut ilmoitetaan radiaaneina, laskin on asetettava rad-tilaan.

$$\sin 2x = 0{,}70$$

$$2x = 0{,}775\ldots + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - 0{,}775\ldots + n \cdot 2\pi$$

Ratkaistaan x jakamalla yhtälöiden molemmat puolet luvulla kaksi.

Muista jakaa myös $n \cdot 2\pi$.

$$2x = 0{,}775\ldots + n \cdot 2\pi \quad |:2$$

$$x = 0{,}387\ldots + n \cdot \pi$$

$$x \approx 0{,}39 + n \cdot \pi$$

$$2x = \pi - 0{,}775\ldots + n \cdot 2\pi$$

$$2x = 2{,}366\ldots + n \cdot 2\pi \quad |:2$$

$$x = 1{,}183\ldots + n \cdot \pi$$

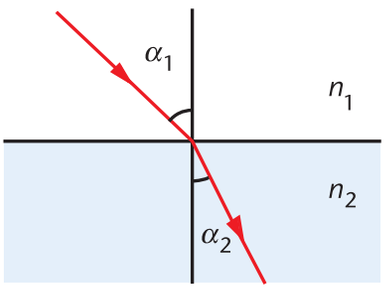
$$x \approx 1{,}2 + n \cdot \pi$$

Vastaus

$x \approx 0{,}39 + n \cdot \pi$ tai $x \approx 1{,}2 + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Esimerkki 4

Valon taittumista aineessa kuvaa taitekerroin n. Se on kullekin aineelle ominainen suure. Esimerkiksi ilmalle taitekerroin on likimain 1, kun taas tavalliselle lasille se on 1,61. Taitekertoimien avulla valon taittumislaki (*Snelliuksen laki*) voidaan esittää muodossa $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, jossa n_1 ja n_2 ovat eri aineiden taitekertoimia, α_1 on tulokulma ja α_2 taitekulma.



Valonsäde osuu lasiin 46° tulokulmassa. Määritä taitekulma.

Ratkaisu

Tulokulma $\alpha_1 = 46°$ ja ilman taitekerroin $n_1 = 1$. Lasin taitekerroin $n_2 = 1{,}61$. Sijoitetaan arvot Snelliuksen yhtälöön:

$$1 \cdot \sin 46° = 1{,}61 \cdot \sin\alpha_2$$

$$1{,}61 \cdot \sin\alpha_2 = 1 \cdot \sin 46° \quad | : 1{,}61$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\sin 46°}{1{,}61}$$

$$\sin\alpha_2 = 0{,}446...$$

$$\alpha_2 = 26{,}538...° + n \cdot 360° \text{ tai } \alpha_2 = (180 - 26{,}538...)° + n \cdot 360°$$

$$\alpha_2 \approx 27° + n \cdot 360° \text{ tai } \alpha_2 \approx 153° + n \cdot 360°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Koska $0° < \alpha_2 < 90°$, ratkaisuna on $\alpha_2 \approx 27°$.

Vastaus

Taitekulma on 27°.

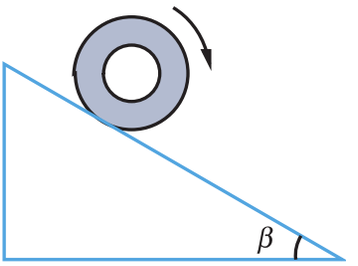
Esimerkki 5

Teräsputki pyörii alas ramppia kuvan mukaisesti. Kappaleen kiihtyvyys a riippuu rampin kallistuskulmasta β yhtälön

$$a = \frac{1}{2} g \sin\beta$$

mukaisesti, jossa $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Määritä kulma β, kun putken kiihtyvyys rampilla on 2,45 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Ratkaisu

Sijoitetaan kiihtyvyys yhtälöön $a = \frac{1}{2} g \sin\beta$:

$$\frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot \sin\beta = 2{,}45$$

$$4{,}905 \cdot \sin\beta = 2{,}45 \quad | : 4{,}905$$

$$\sin\beta = 0{,}4994...$$

$$\beta = 29{,}96...^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ tai } \beta = (180 - 29{,}96...)^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\beta \approx 30^\circ + n \cdot 360^\circ \qquad \beta \approx 150^\circ + n \cdot 360^\circ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Koska $0^\circ < \beta < 90^\circ$, ratkaisuksi kelpaa $\beta \approx 30^\circ$.

Vastaus

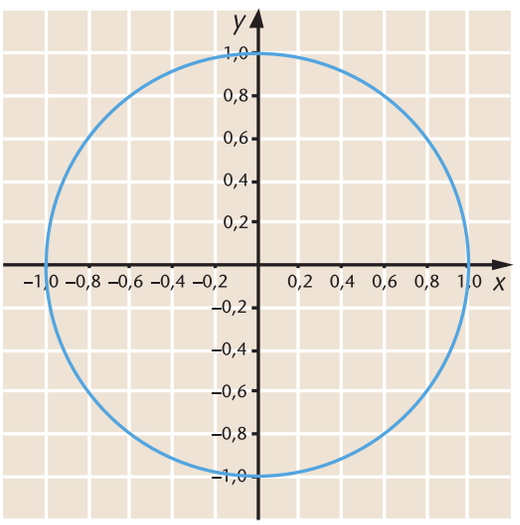
Rampin kallistuskulma on 30°.

Tehtäviä

45. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus asteina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\sin\beta = 0{,}90$ b) $\sin\beta = -0{,}25$

46. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus radiaaneina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\sin\gamma = 0{,}165$ b) $\sin\gamma = -0{,}822$

47. Ratkaise kuvan avulla mittaamalla yhtälö
a) $\sin x = 0{,}40$
b) $\sin x = -0{,}90$.
Ilmoita vastaukset asteen tarkkuudella. Tarkista tuloksesi laskimella.



48. Määritä kahden merkitsevän numeron tarkkuudella yhtälön $\sin x = -0{,}321$ ratkaisuista ne, jotka kuuluvat välille $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

49. Määritä yhtälön $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ratkaisuista ne, jotka kuuluvat välille $90° \le x \le 180°$.

50. Ratkaise yhtälö $\sin 4x = 0{,}822$. Anna vastaus radiaaneina.

51. Ratkaise yhtälö $2\sin 2x - 0{,}3 = 0$ asteina. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

52. Määritä lausekkeen $\sin 3x - \frac{1}{5}$ nollakohdat. Anna vastaus asteen tarkkuudella.

53. Määritä taulukkokirjan avulla yhtälön $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tarkka ratkaisu radiaaneina.

54. Ratkaise yhtälö $\sin(-2x) = \sin\frac{\pi}{6}$.

55. Kaappikellon heilurin kärkiosassa sijaitsevan punnuksen korkeus maanpinnasta h (cm) voidaan ratkaista yhtälön

$$h = 12{,}5\sin x + 25, \quad 0 \le x \le 70°$$

avulla. Kun kello on pysähdyksissä, heiluri on tasapainoasemassa ja sen poikkeama asteina (x) on nolla. Kuinka suuri on poikkeama tasapainoasemasta, kun heilurin kärki on korkeudella 32 cm?

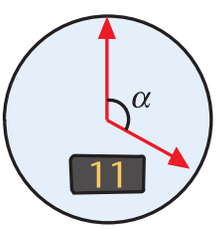
56. Valonsäde osuu veteen tulokulmassa α. Ilman taitekerroin on likimain 1,0 ja veden taitekerroin 1,3. Määritä Snelliuksen lain avulla tulokulma, kun taitekulma on 28°. Snelliuksen laki on esitelty esimerkissä 4.

57. CD-levy on heijastushila. Levyn pinnalla on uria, joiden etäisyys toisistaan on noin $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ m. Valon interferenssi synnyttää levyn pinnalle värejä. Levyn pinnalle ohjataan laser-valo, jonka aallonpituus on $530 \cdot 10^{-9}$ m. Valo taipuu ja varjostimella nähdään tummia ja valoisia kohtia. Valoisa kohta syntyy ehdolla $d\sin\alpha = k\lambda$, jossa d on hilavakio, k tietyn kertaluvun valomaksimi ja λ valon aallonpituus. Laske valon taipumiskulma välillä $[0°, 90°]$, kun $k = 1$ ja CD-levyn hilavakio on urien välinen etäisyys.

58. Mikä-mikä-maassa aikaa mitataan epämääräisesti. Kellotaulussa liikkuu vain tuntiviisari. Minuuttiviisari osoittaa aina suoraan ylös. Keskiyöllä molemmat viisarit osoittavat suoraan ylös. Tämän jälkeen aikaa t mitataan tuntiviisarin kiertokulman α funktiona $t(\alpha) = 12\sin\alpha$. Kellonaika näkyy digitaalisena kellotaulussa.

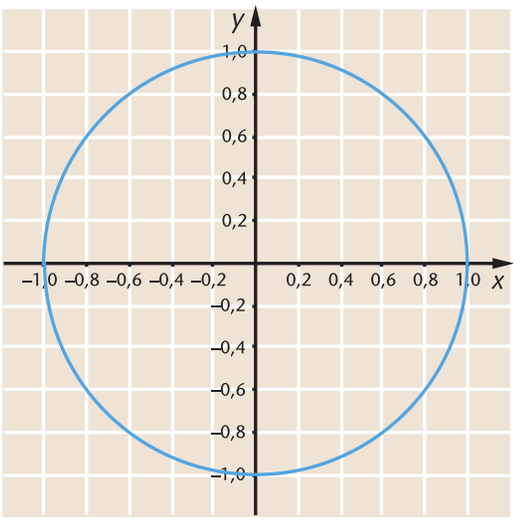
a) Laske aika, kun kiertokulma on 40°.

b) Mikä on kiertokulma, kun aika $t = 11$?



Sekalaisia tehtäviä

59. Ratkaise kuvan avulla mittaamalla yhtälö
a) $\sin x = 0{,}7$
b) $\sin x = -0{,}7$.
Ilmoita vastaus asteen tarkkuudella. Tarkista tulos laskimella.



60. Ratkaise yhtälö radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\sin\beta = 0{,}54$
b) $\sin\beta = -0{,}38$

61. Ratkaise yhtälö taulukkokirjan avulla käyttämättä likiarvoja. Ilmoita vastaus radiaaneina.
a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

62. Ratkaise yhtälö $3\sin 3x + 2 = 0$ radiaaneina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

63. Kastelulaitteen suihkun maksimietäisyys x (m) riippuu vesisuihkun lähtökulmasta β, jota voidaan säätää. Riippuvuus kulmasta voidaan esittää muodossa

$$x = \frac{(v_0)^2 \cdot \sin 2\beta}{9{,}81},\ 0° < \beta < 60°.$$

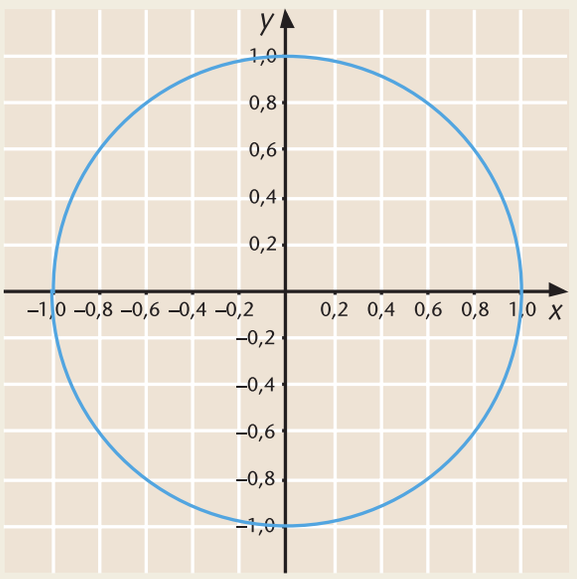
Suure v_0 on nopeus, jolla vesisuihku lähtee laitteesta. Eräänä kesäpäivänä vesisuihku lensi 17 metrin päähän lähtöpaikasta. Kuinka suureksi lähtökulma oli säädetty, kun veden lähtönopeus oli 18 m/s?

2.2 Kosini- ja tangenttiyhtälöt

POHDINTA 1

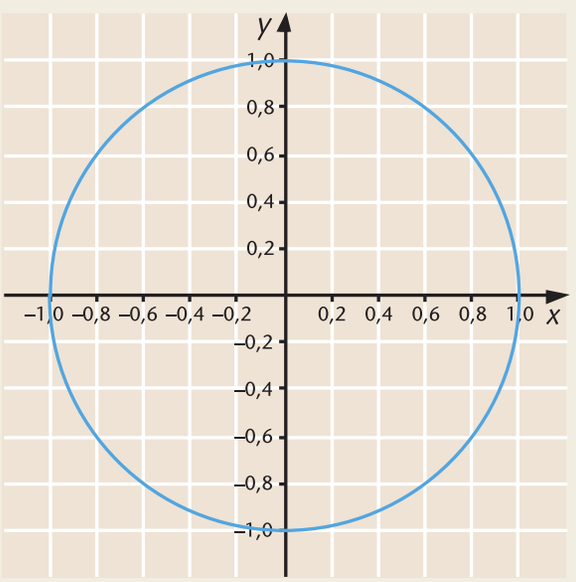
Väliltä $[0°, 90°]$ löytyy yksi kulma, jonka kosini on 0,5. Piirrä tämä kulma ja mittaa kulma astemitalla.

Etsi ainakin yksi muu kulma, jonka kosinilla on sama arvo kuin edellä. Piirrä kulma ja mittaa se.



POHDINTA 2

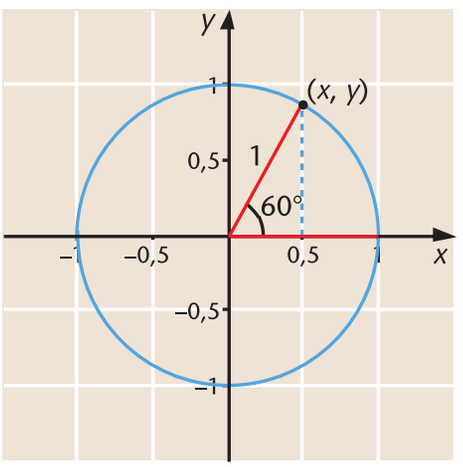
Etsi väliltä $[0°, 360°]$ kaksi kulmaa, joiden tangentin arvo on 0,6. Piirrä kulmat ja mittaa ne. Millainen riippuvuus kulmien välillä näyttäisi olevan?

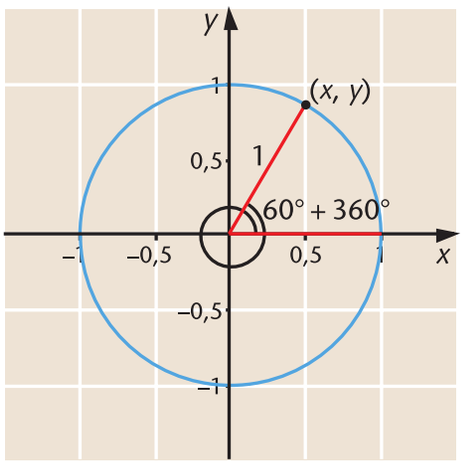


Kosiniyhtälö

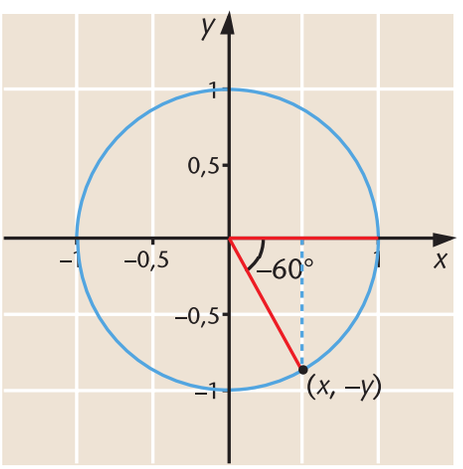
Kosini määriteltiin yksikköympyrän avulla kehäpisteen x-koordinaatiksi. Niinpä esimerkiksi 60° kulman kosinia vastaa x-akselin arvo 0,5.

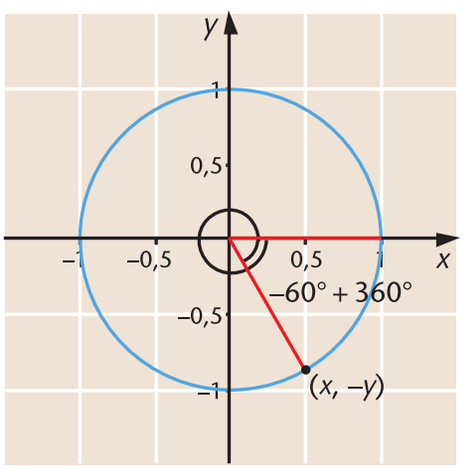
Jos 60° kulmaan lisätään 360° eli täysikulma, päädytään takaisin samaan kehäpisteeseen eli $\cos(60° + 360°) = 0{,}5$. Kosinin arvo 0,5 toistuu aina 360° välein samalla tavoin kuin sininkin.



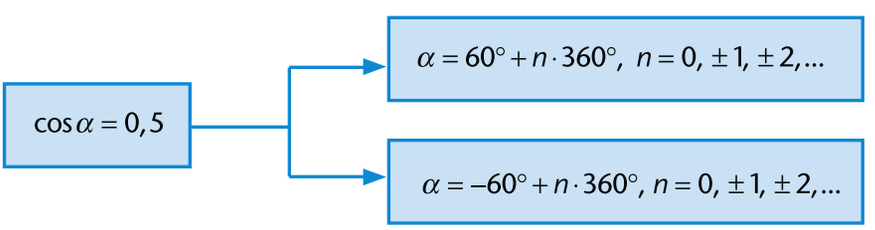


Peilataan 60° kulman loppukylki x-akselin suhteen. Muodostunut kulma on 60°, mutta koska kiertosuunta on myötäpäivään, kulman etumerkiksi tulee miinus eli –60°. Tämän kulman kehäpisteen x-koordinaatti on sama kuin 60 asteen kulmalla eli $\cos(-60°) = 0{,}5$. Myös tämä kosinin arvo toistuu aina 360° välein eli esimerkiksi $\cos(-60° + 360°) = \cos 300° = 0{,}5$.

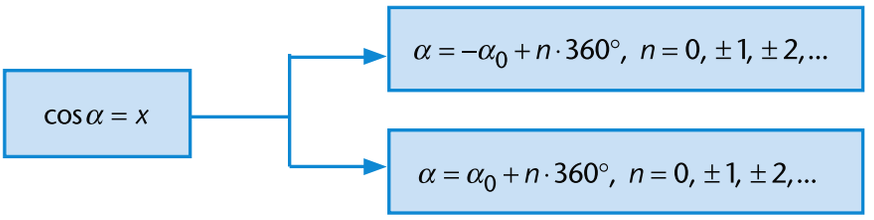


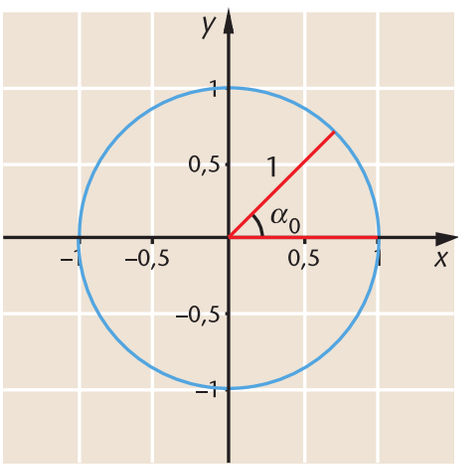


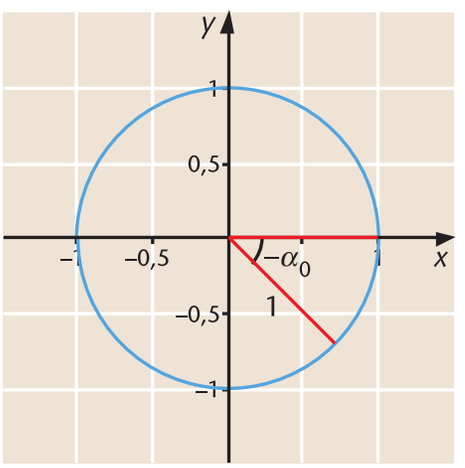
Kosinin arvoa 0,5 vastaa siis seuraava kulmajoukko:



Olkoon α_0 nyt kulma, jolle on voimassa $\cos\alpha_0 = x$. Oletetaan lisäksi, että $0° < \alpha_0 < 360°$. Tällöin yhtälön $\cos\alpha = x$ kaikki ratkaisut voidaan esittää seuraavassa muodossa:







ESIMERKKI 1 Ratkaise yhtälö $\cos\beta = 0{,}75$ sekä asteina että radiaaneina.

RATKAISU Ratkaistaan kulmat laskimen $\cos^{-1}$-toiminnolla. Kun ratkaisu halutaan asteina, laskimen on oltava **DEG**-tilassa.

$$\cos\beta = 0{,}75$$
$$\beta = \pm 41{,}409...° + n \cdot 360°$$
$$\beta \approx \pm 41° + n \cdot 360°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Ratkaisu radiaaneina saadaan, kun laskin asetetaan **RAD**-tilaan:

$$\beta = \pm 0{,}7227... + n \cdot 2\pi$$
$$\beta \approx \pm 0{,}72 + n \cdot 2\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

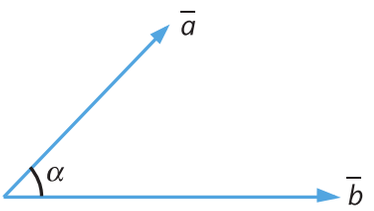
VASTAUS Ratkaisu asteina on $\beta \approx \pm 41° + n \cdot 360°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ ja ratkaisu radiaaneina $\beta \approx \pm 0{,}72 + n \cdot 2\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

ESIMERKKI 2

Myöhemmin tällä kurssilla tutustutaan vektoreiden skalaarituloon. Kahden vektorin $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ skalaaritulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$ määritellään seuraavasti:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha,$$

jossa $|\overline{a}|$ on vektorin $\overline{a}$ pituus, $|\overline{b}|$ on vektorin $\overline{b}$ pituus ja α on vektorien välisen kulman suuruus.



Kahden vektorin skalaaritulo oli 24,7. Vektorien pituudet olivat 5,02 ja 7,10. Laske vektorien välisen kulman suuruus, kun kulma kuuluu välille $[0°, 180°]$.

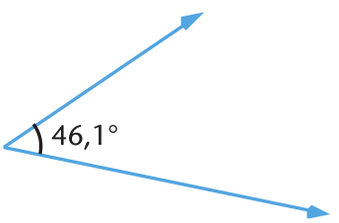
RATKAISU

Sijoitetaan skalaaritulon kaavaan arvot

$$|\overline{a}| = 5{,}02, \qquad |\overline{b}| = 7{,}10 \qquad \text{ja} \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = 24{,}7.$$

$$\begin{aligned} |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha &= \overline{a} \cdot \overline{b} \\ 5{,}02 \cdot 7{,}10 \cdot \cos\alpha &= 24{,}7 \\ 35{,}642 \cdot \cos\alpha &= 24{,}7 \quad \big| : 35{,}642 \\ \cos\alpha &= 0{,}6930... \\ \alpha &= \pm 46{,}131...° + n \cdot 360° \\ \alpha &\approx \pm 46{,}1° + n \cdot 360°, n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{aligned}$$

Kulmista vain 46,1° kuuluu välille $[0°, 180°]$.



VASTAUS

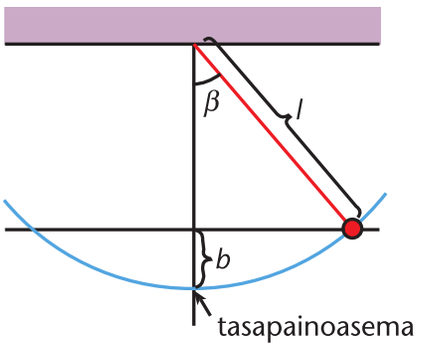
Vektorien välinen kulma on 46,1°.

ESIMERKKI 3

Yksinkertaisen heilurin korkeus tasapainoaseman yläpuolella (h) voidaan laskea kaavalla

$$h = l - l \cdot \cos\beta,$$

jossa l on langan pituus ja kulma β on poikkeama tasapainoasemasta.



Laske heilurin poikkeama tasapainoasemasta asteina, kun eräällä hetkellä heiluri on 7,8 cm tasapainoaseman yläpuolella. Langan pituus on 32,0 cm.

RATKAISU

Sijoitetaan $l = 32{,}0$ ja $h = 7{,}8$ yhtälöön $h = l - l \cdot \cos\beta$:

$$\begin{aligned}
7{,}8 &= 32{,}0 - 32{,}0 \cdot \cos\beta \\
32{,}0 - 32{,}0 \cdot \cos\beta &= 7{,}8 \\
-32{,}0 \cdot \cos\beta &= -24{,}2 \quad \big| : (-32{,}0) \\
\cos\beta &= 0{,}756... \\
\beta &= \pm 40{,}865...^\circ + n \cdot 360^\circ \\
\beta &\approx \pm 41^\circ + n \cdot 360^\circ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}$$

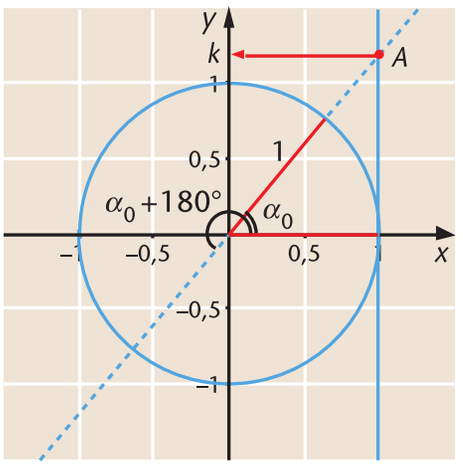
Näistä kulmista ratkaisuksi kelpaa $\beta \approx 41^\circ$ tai $\beta \approx -41^\circ$.

VASTAUS

Poikkeama on 41° tai -41°.

Tangenttiyhtälö

Tangentti tulkittiin geometrisesti kulmaa vastaavan tangenttipisteen y-koordinaatiksi. Tarkastellaan kulmaa α_0, $0° < \alpha_0 < 90°$, jonka tangenttipiste on A ja jolle $\tan\alpha_0 = k$.



Kulman α_0 lisäksi sama tangenttipiste on kulmalla $\alpha_0 + 180°$. Kaikilla kulmilla, jotka toistuvat 180° välein, on sama tangentin arvo. Yhtälön $\tan\alpha = k$ kaikki ratkaisut voidaan esittää seuraavasti:

$\tan\alpha = k$ → $\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Esimerkki 4

Ratkaise yhtälö $\tan\gamma = 1{,}15$ kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. Anna vastaus asteina.

Ratkaisu

Kulma ratkaistaan laskimen $\tan^{-1}$-toiminnolla:

$$\tan\gamma = 1{,}15$$
$$\gamma = 48{,}9909...° + n \cdot 180°$$
$$\gamma \approx 49{,}0° + n \cdot 180°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Vastaus

$\gamma \approx 49{,}0° + n \cdot 180°,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

ESIMERKKI 5 Ratkaise taulukkokirjan avulla yhtälöt. Anna vastaus radiaaneina.

a) $\tan\beta = \sqrt{3}$ b) $\tan\gamma = -1$

RATKAISU Taulukkokirjassa on laskettu tarkat arvot eräiden kulmien tangentille.

a) $\tan\beta = \sqrt{3}$

$$\beta = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

b) $\tan\gamma = -1$

$$\gamma = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

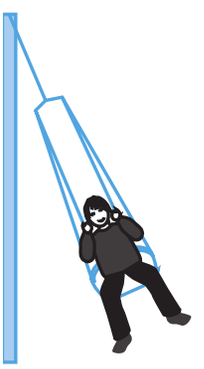
VASTAUS a) $\beta = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) $\gamma = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ESIMERKKI 6 Henkilö istuu tasaisesti pyörivässä karusellissa, eli hän on tasaisessa pyörimisliikkeessä. Tällöin hänellä on kiihtyvyys a, joka suuntautuu suoraan kohti karusellin akselia. Kiihtyvyys voidaan laskea kaavalla

$$a = g \cdot \tan\alpha,$$

jossa kulma α on poikkeama tasapainoasemasta ja g taas maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys $9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Määritä kulma α, kun akseliin suuntautuva kiihtyvyys on $4{,}43\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



RATKAISU Sijoittamalla arvot $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja $a = 4{,}43\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ yhtälöön saadaan

$$9{,}81 \cdot \tan\alpha = 4{,}43 \quad | : 9{,}81$$

$$\tan\alpha = 0{,}451\ldots$$

$$\alpha = 24{,}302\ldots^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Kysytyn kulman on oltava alle 90°, joten $\alpha \approx 24{,}3^\circ$.

VASTAUS 24,3°

Tehtäviä

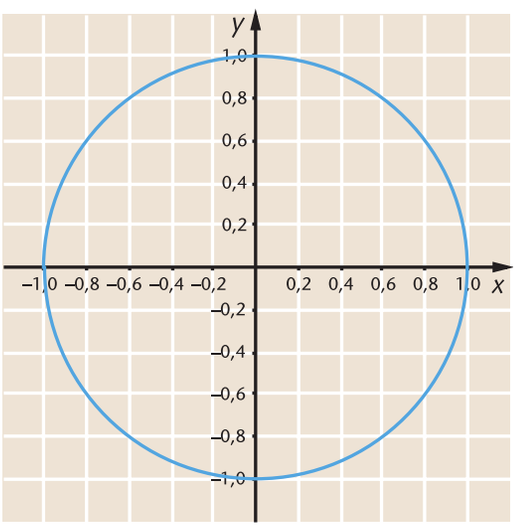
Kosiniyhtälö

64. Ratkaise yhtälö asteina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\cos x = 0{,}731$ b) $\cos x = -0{,}42$

65. Ratkaise yhtälö radiaaneina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\cos\gamma = 0{,}920$ b) $\cos\gamma = -0{,}262$

66. Ratkaise yhtälö kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Ilmoita vastaus radiaaneina.
a) $\cos 2x = 0{,}20$ b) $3\cos 3x = 1{,}4$

67. Ratkaise kuvan avulla mittaamalla yhtälö $\cos\alpha = 0{,}4$ asteen tarkkuudella.
Tarkista tulos laskimella.



68. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella
a) $-\cos 2x = \frac{1}{2}$
b) $\cos 2x - \frac{1}{3} = 0$

69. Ratkaise radiaaneina taulukkokirjan avulla likiarvoja käyttämättä yhtälö
a) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

70. Ratkaise yhtälö $2\cos 2\gamma - 0{,}8 = 0$ radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

71. Tutustu pistetulon käsitteeseen esimerkissä 2. Laske sen avulla kahden vektorin välinen tylppä kulma, kun vektorien pistetulo on –216 ja vektorien pituudet ovat 18 ja 24.

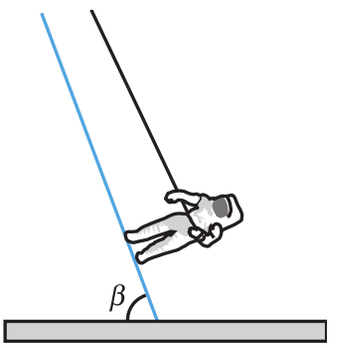
72. Astronautit totuttelevat Kuun alhaisen painovoiman oloihin kuvan koejärjestelyllä. Siinä lattiaa vasten asetetaan taso sopivaan kulmaan β ja valjaisiin puettu astronautti hyppii tasoa vasten. Oikea kulma saadaan yhtälöllä

$$\cos\beta = \frac{g_{\text{Kuu}}}{g_{\text{Maa}}},$$

jossa g_{Kuu} ja g_{Maa} ovat Kuun ja Maan putoamiskiihtyvyydet. Laske kulma β, kun

$$g_{\text{Kuu}} = 1{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{ja}$$

$$g_{\text{Maa}} = 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



73. Messuilla oleva opastekyltti on tasakylkisen kolmion muotoinen. Kolmion kyljen pituus 1,20 m ja kanta 80 cm. Laske kyltin kantakulman suuruus.

Tangenttiyhtälö

74. Ratkaise yhtälö asteina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\tan x = 4{,}8$ b) $\tan x = -15$

75. Ratkaise yhtälö radiaaneina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\tan\gamma = 35{,}2$ b) $\tan\gamma = -4{,}03$

76. Ratkaise yhtälö $3\tan 2x = 18$ asteen tarkkuudella.

77. Ratkaise yhtälö $\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{3}$ radiaaneina.

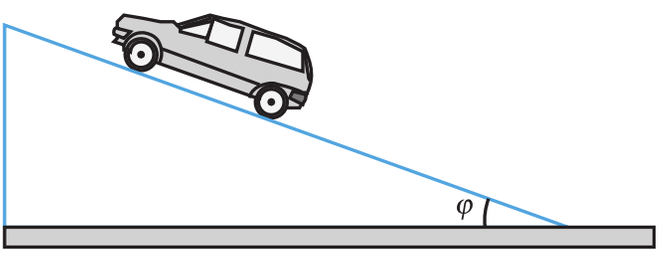
78. Ratkaise yhtälö taulukkokirjan avulla likiarvoja käyttämättä. Anna vastaus radiaaneina.
a) $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\tan 2x = \sqrt{2}+1$

79. Määritä yhtälön $\tan x - 2 = 3$ juurista yhden desimaalin tarkkuudella ne, jotka ovat välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

80. Ratkaise yhtälö $3\cos\alpha = \sin\alpha$ asteen kymmenesosan tarkkuudella.

81. Tasakylkisen kolmion kantakulma on kaksinkertainen huippukulmaan verrattuna. Kolmion kanta on 50 cm ja korkeus 75 cm. Laske huippukulman suuruus asteen tarkkuudella.

82. Aineelle ominainen lepokitkakerroin μ_s voidaan määritellä kaltevan tason avulla seuraavasti: se on suurimman mahdollisen kulman φ tangentti, jossa kappale vielä pysyy levossa liukumatta. Auto on paikallaan (käsijarru päällä) kadulla, jonka pinnoitteen lepokitkakerroin on 0,8. Kuinka jyrkkä voi kadulla oleva rinne enintään olla (asteina), jotta auto ei lähde liukumaan mäkeä alaspäin?

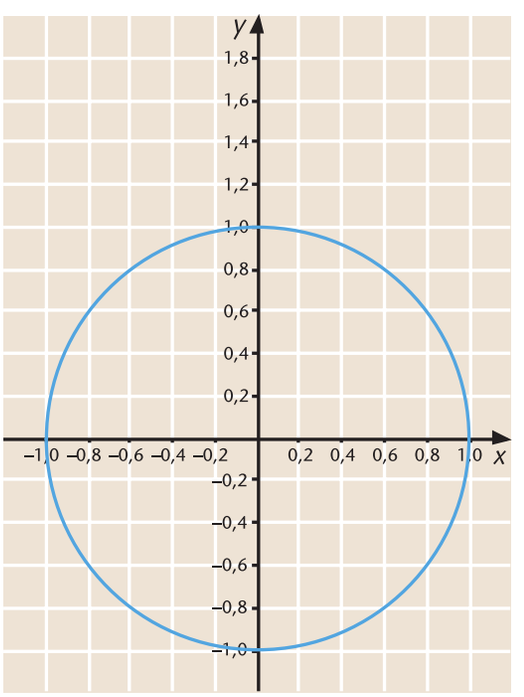


Sekalaisia tehtäviä

83. Ratkaise yhtälö radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $\cos x = 0{,}10$ b) $\tan x = -11$

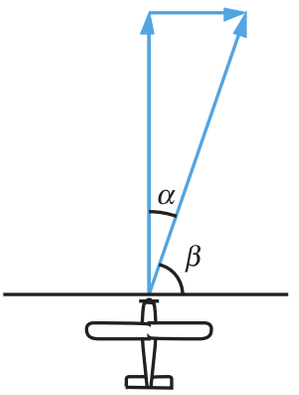
84. Ratkaise yhtälö asteen tarkkuudella.
a) $4\cos 2\beta + 1 = 0$ b) $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 16{,}4$

85. Ratkaise kuvan avulla mittaamalla yhtälö asteen tarkkuudella. Tarkista tulos laskimella.
a) $\tan\alpha = 1{,}6$
b) $\cos\alpha = -0{,}4$



86. Ratkaise taulukkokirjan avulla likiarvoja käyttämättä yhtälö
a) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
b) $\tan x = \sqrt{2} - 1$.
Ilmoita vastaukset radiaaneina.

87. Lentokone yrittää lentää suoraan kohti pohjoista nopeudella 95 m/s. Itätuuli puhaltaa kuitenkin nopeudella 28 m/s. Tällöin lentokoneen nopeus hiukan kasvaa, mutta tuulen vuoksi lentorata suuntautuukin syrjään etelä-pohjoissuunnasta. Kulmaa β, lentokoneen lentonopeutta pohjoiseen ja tuulen nopeutta sitoo yhtälö



$$v_{\text{lentokone}} = v_{\text{tuuli}} \cdot \tan\beta.$$

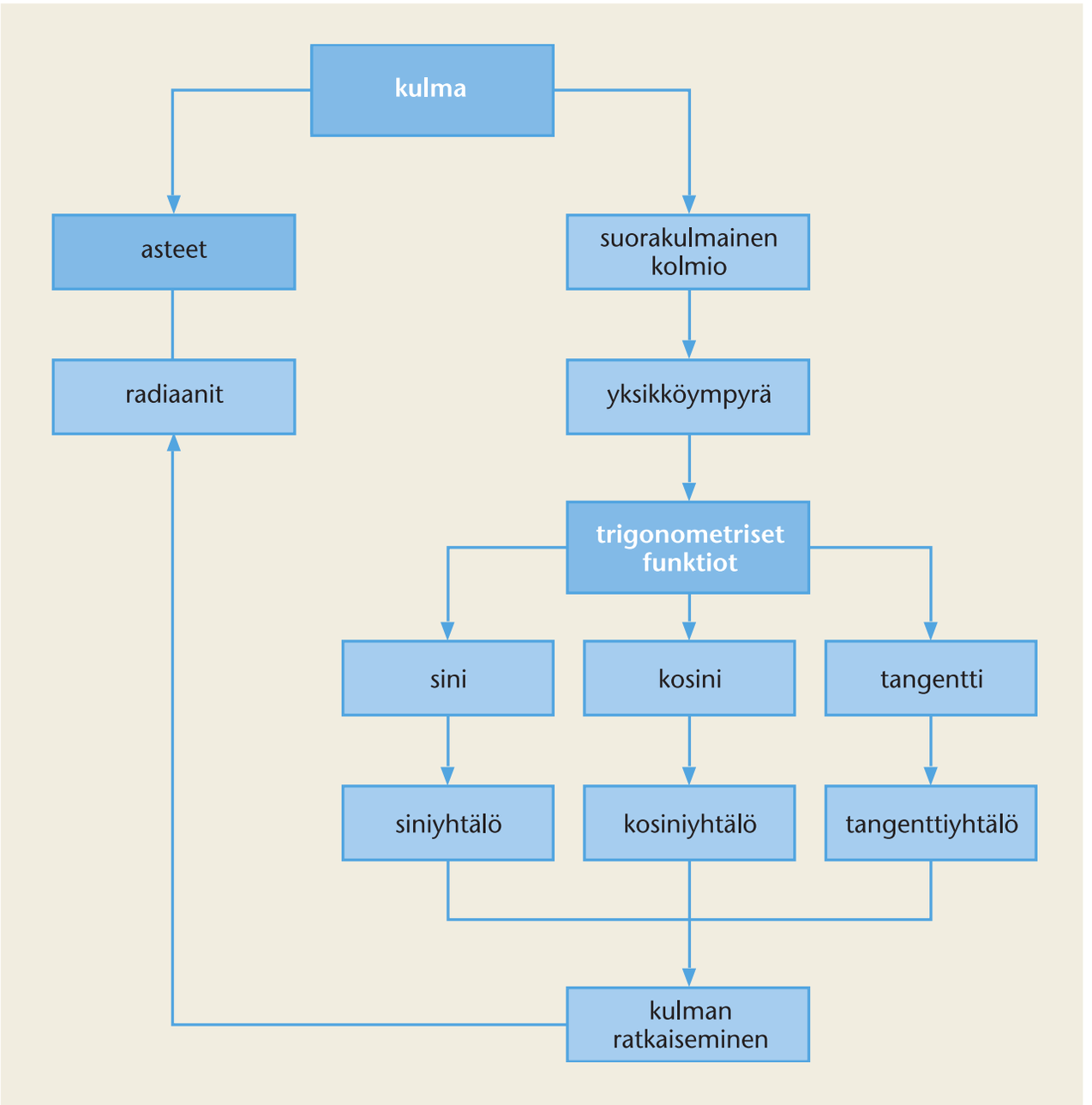
Lentokoneen poikkeama etelä-pohjoissuunnasta on kulma α. Määritä tämä kulma asteen tarkkuudella.

88. Tarkastellaan tehoa, jolla sähköenergiaa muuttuu vaihtovirtapiiriä kuormittavan laitteen, esimerkiksi lampun, energiaksi. Laitteen vaihtovirtapiiristä ottama teho P saadaan suureyhtälöstä

$P = UI\cos\varphi$, jossa

$\cos\varphi$ on tehokerroin ja kulma φ kuvaa hetkellisen jännitteen U ja virran I välistä vaihe-eroa. Laske vaihe-ero, kun jännitteen tehollinen arvo on 220 V (volttia) ja laitteessa kulkee 8 A (ampeerin) virta sekä laitteen piiristä ottaman tehon arvo on $1{,}6 \cdot 10^3$ W (wattia).

Keskeisiä käsitteitä trigonometriasta



3 Trigonometriset funktiot jaksollisten ilmiöiden malleina

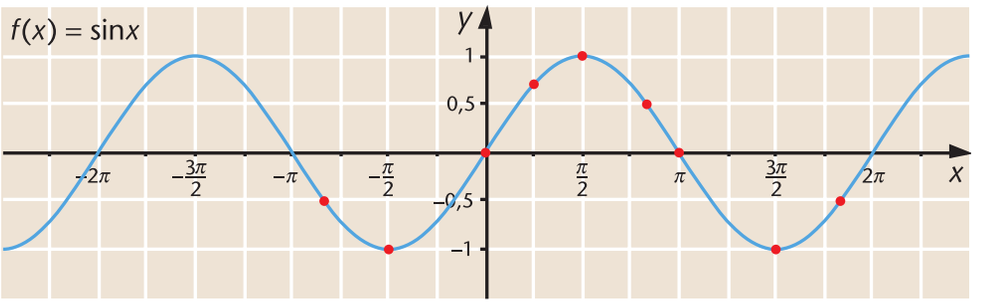
3.1 Trigonometristen funktioiden jaksollisuus

Trigonometrisilla funktioilla on tärkeä merkitys esimerkiksi fysiikan useilla alueilla. Ne liittyvät usein erilaisiin jaksollisiin ilmiöihin. Tässä luvussa tutustutaan tarkemmin sini-, kosini- ja tangenttifunktioihin ja tutkitaan niiden ominaisuuksia.

Tarkastellaan ensin funktiota $f(x) = \sin x$. Lasketaan funktion arvoja. Kulman yksiköksi valitaan radiaani.

x	$f(x) = \sin x$
0	$f(0) = \sin 0 = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
$-\frac{\pi}{2}$	$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
$\frac{5\pi}{6}$	$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$	$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
π	$f(\pi) = \sin\pi = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$
$\frac{11\pi}{6}$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Laskemalla riittävän monta arvoa funktiolle voidaan hahmotella sen kuvaaja.



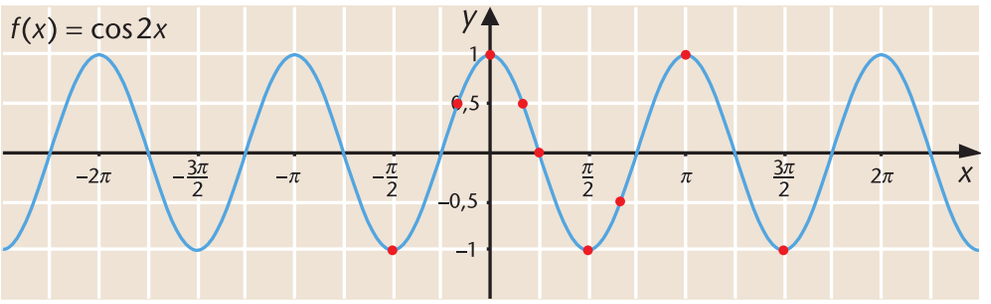
Sinin *jaksollisuus* nähdään kuvaajasta. Funktio saa saman arvon aina 2π:n välein. Myös kosini on jaksollinen funktio. Sen piirtäminen on harjoitustehtävänä.

ESIMERKKI 1 Piirrä funktion $f(x) = \cos 2x$ kuvaaja.

RATKAISU Lasketaan ensin muutamia funktion arvoja. Apuna voi käyttää taulukkokirjaa.

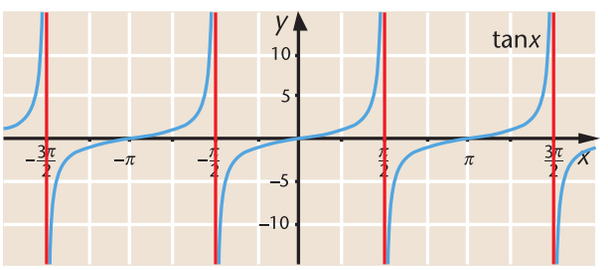
x	$f(x) = \cos 2x$
0	$f(0) = \cos(2 \cdot 0) = \cos 0 = 1$
$\frac{\pi}{6}$	$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
$-\frac{\pi}{6}$	$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$
$-\frac{\pi}{2}$	$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) = -1$
$\frac{2\pi}{3}$	$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
π	$f(\pi) = \cos 2\pi = 1$
$\frac{3\pi}{2}$	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) = \cos 3\pi = -1$

Hahmotellaan laskettujen pisteiden avulla kuvaaja. Jo muutaman lasketun arvon perusteella voi ennustaa funktion kulun.



Funktioiden $f(x) = \sin x$ ja $f(x) = \cos 2x$ kuvaajista nähdään, että sinin ja kosinin arvot vaihtelevat välillä $[-1, 1]$. Tangenttifunktiolla ei näin ole.

Tangenttifunktion piirtämiseen tarvitaan runsaasti pisteitä. Alle on piirretty funktion $f(x) = \tan x$ kuvaaja. Kuvasta nähdään, että myös tangentti on jaksollinen funktio. Sen jakso on π. Tangenttifunktio voi saada mitä tahansa reaaliarvoja, eli tangentilla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.



Tangentin kuvaajasta nähdään, että tangentti ei ole määritelty kaikissa pisteissä. Nämä kohdat ovat seurausta määritelmästä:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Koska nimittäjä ei voi saada arvoa nolla, on vaadittava, että $\cos x \neq 0$.

$$\cos x \neq 0$$

$$x \neq \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

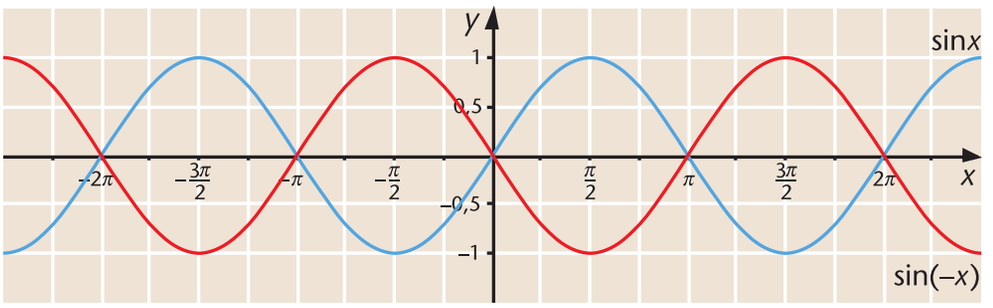
Nimittäjän nollakohtia ovat esimerkiksi $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Esimerkki 2

Kuvaan on piirretty funktioiden $\sin x$ ja $\sin(-x)$ kuvaajat. Määritä kuvaajan perusteella

a) $\sin\frac{\pi}{2}$ b) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ c) $-\sin\frac{\pi}{2}$ d) $-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Päättele näiden tulosten perusteella funktioiden $\sin x$ ja $\sin(-x)$ välinen yhteys.



Ratkaisu

a) Kun $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} \approx 1$ (sininen nuoli oikealla).

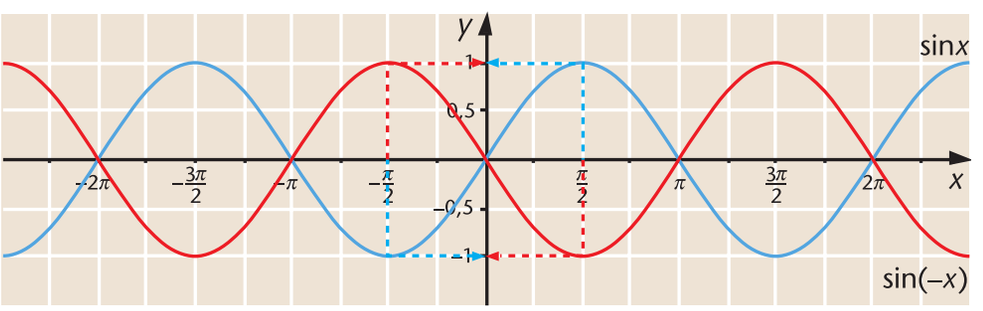
b) Kun $x = -\frac{\pi}{2}$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx -1$ (sininen nuoli vasemmalla).

c) $-\sin\frac{\pi}{2}$ ja $\sin\frac{\pi}{2}$ ovat toistensa vastalukuja, joten

$-\sin\frac{\pi}{2} \approx -1$.

d) $-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ja $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ovat toistensa vastalukuja, joten

$-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx 1$.



Esimerkkien ja kuvaajien perusteella nähdään, että funktioiden $\sin x$ ja $\sin(-x)$ arvot ovat toistensa vastalukuja (esimerkiksi oikeanpuoleiset punainen ja sininen nuoli). Tulos voidaan esittää seuraavassa muodossa:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

Vastaus

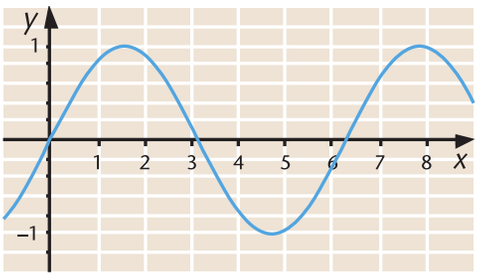
a) $\sin\frac{\pi}{2} \approx 1$ b) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx -1$ c) $-\sin\frac{\pi}{2} \approx -1$ d) $-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \approx 1$

Esimerkki 3

Päättele funktion $f(x) = \sin x$ kuvaajan avulla kaikki ratkaisut yhtälölle yhden desimaalin tarkkuudella.

a) $\sin x = 0{,}9$

b) $\sin x = -0{,}75$.



Ratkaisu

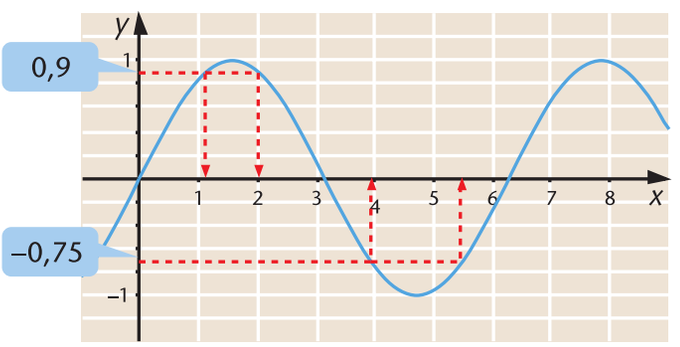
a) Tarkastellaan kuvaajaa yhden jakson aikana eli välillä $[0, 2\pi]$. y-koordinaatti saa tällä välillä arvon 0,9 kaksi kertaa. Näin ollen

$$\sin x = 0{,}9$$

$$x \approx 1{,}0 + n \cdot 2\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

tai

$$x \approx 2{,}1 + n \cdot 2\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



b) Funktio f saa välillä $[0, 2\pi]$ arvon $-0{,}75$ kaksi kertaa:

$$\sin x = -0{,}75$$

$$x \approx 4{,}0 + n \cdot 2\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

tai

$$x \approx 5{,}5 + n \cdot 2\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Vastaus

a) $x \approx 1{,}0 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2{,}1 + n \cdot 2\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) $x \approx 4{,}0 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 5{,}5 + n \cdot 2\pi, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Esimerkki 4

Laske funktion g nollakohdat kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, kun

a) $g(x) = \cos x - 0{,}2$

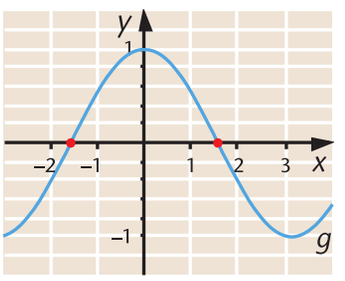
b) $g(x) = \tan 2x - 3,\ x \neq \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi.$

Ratkaisu

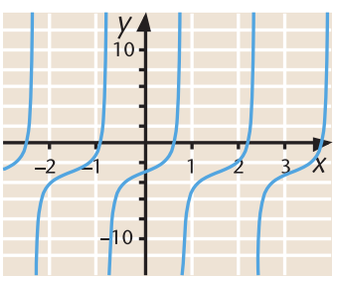
a) Nollakohdissa funktio saa arvon nolla, eli on ratkaistava yhtälö $g(x) = 0$:

$$\cos x - 0{,}2 = 0$$
$$\cos x = 0{,}2$$
$$x = \pm 1{,}369... + n \cdot 2\pi,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$
$$x \approx \pm 1{,}37 + n \cdot 2\pi,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Kuvassa on esitetty funktion g kuvaaja, josta nähdään kaksi nollakohdista.



b) Merkitsemällä $g(x) = 0$ saadaan yhtälö



$$\tan 2x - 3 = 0$$
$$\tan 2x = 3$$
$$2x = 1{,}249... + n \cdot \pi \quad |:2$$
$$x = 0{,}6245... + n \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$x \approx 0{,}625 + n \cdot \frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Jokainen termi, myös jakso, jaetaan luvulla kaksi.

Vastaus

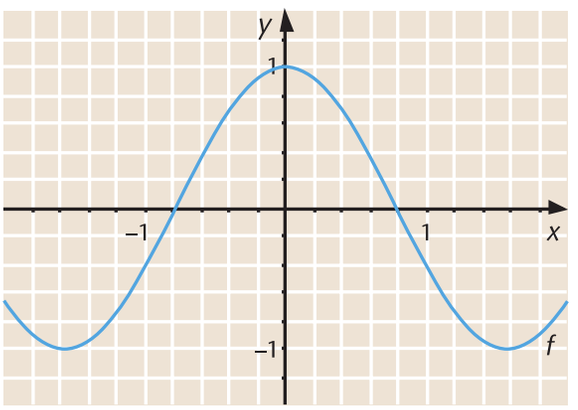
a) $x \approx \pm 1{,}37 + n \cdot 2\pi,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

b) $x \approx 0{,}625 + n \cdot \frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

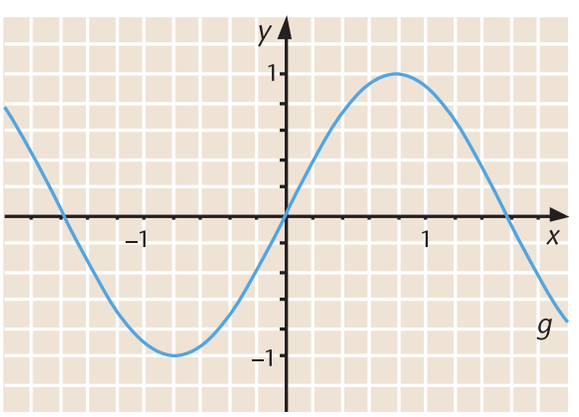
Tehtäviä

89. Piirrä funktion $f(x) = \cos x$ kuvaaja. Laske riittävästi kosinin arvoja.

90. Kuvassa on esitetty funktion $f(x) = \cos 2x$ kuvaaja. Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö välillä $[0, 2]$.
a) $\cos 2x = -0{,}5$
b) $\cos 2x = 0{,}4$
Ilmoita vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

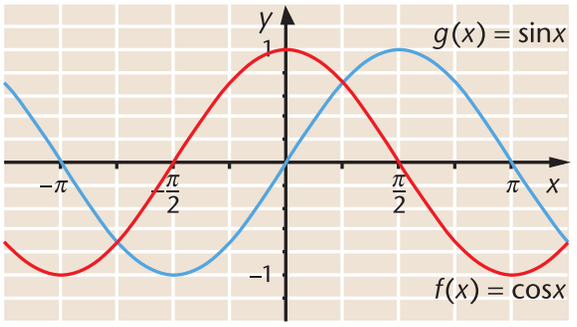


91. Kuvassa on funktion $g(x) = \sin 2x$ kuvaaja. Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö
a) $\sin 2x = 0{,}4$, kun $0 \le x \le 2$ (rad)
b) $\sin 2x = -1$, kun $-2 \le x \le 2$ (rad).
Ilmoita vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

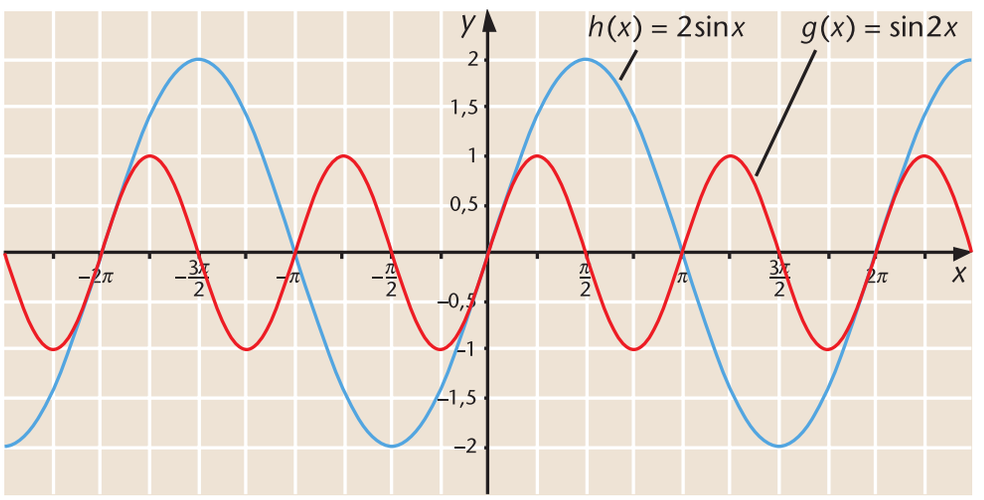


92. Määritä funktion g nollakohdat radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun
a) $g(x) = 2\tan x - 16$
b) $g(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}$.

93. Kuvassa on esitetty funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ kuvaajat. Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $\sin x = \cos x$ välillä $[-\pi, \pi]$.

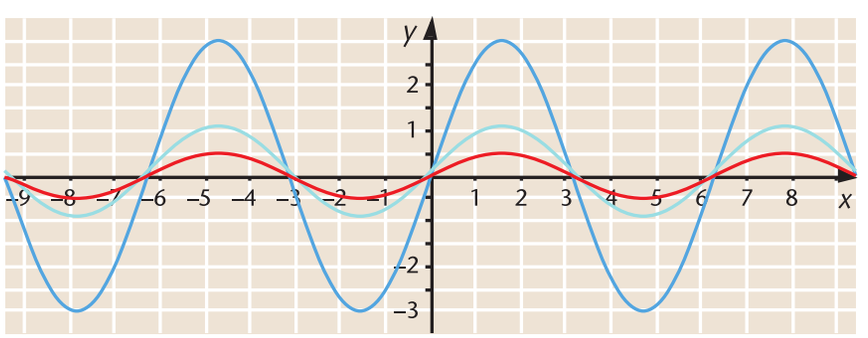


94. Kuvaan on piirretty funktiot $g(x) = \sin 2x$ ja $h(x) = 2\sin x$. Ratkaise kuvaajan avulla $g(x) = h(x)$, kun $-\frac{2\pi}{3} \le x \le \pi$.

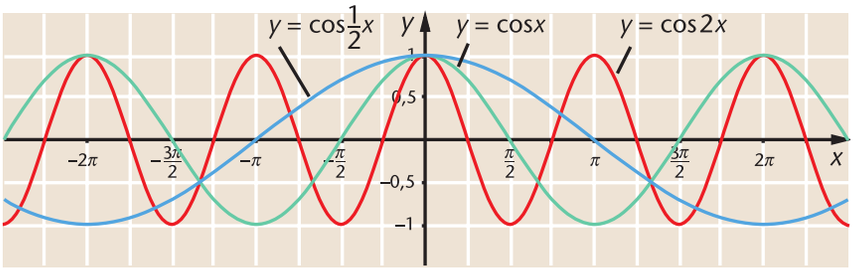


95. Piirrä funktioiden $f(x) = \cos x$ ja $g(x) = -\cos(-x)$ kuvaajat samaan koordinaatistoon ja päättele niiden avulla funktioiden $\cos x$ ja $\cos(-x)$ välinen yhteys.

96. Kuvassa on esitetty funktioiden $f(x) = 0{,}5\sin x$, $g(x) = \sin x$ ja $k(x) = 3\sin x$ kuvaajat.
    a) Yhdistä funktio oikeaan kuvaajaan.
    b) Funktio g saa kaikki arvot välillä $[-1, 1]$. Määritä kahden muun funktion saamat arvot.



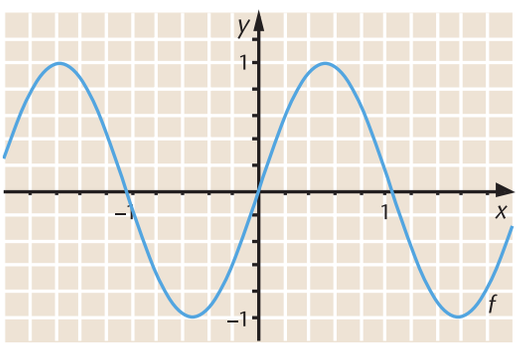
97. Kuvassa on esitetty funktioiden $\cos\frac{1}{2}x$, $\cos x$ ja $\cos 2x$ kuvaajat. Päättele kuvien avulla funktioiden $\cos\frac{1}{2}x$ ja $\cos 2x$ jaksojen pituus. Päättele edelleen funktion $\cos 4x$ jakson pituus.



Sekalaisia tehtäviä

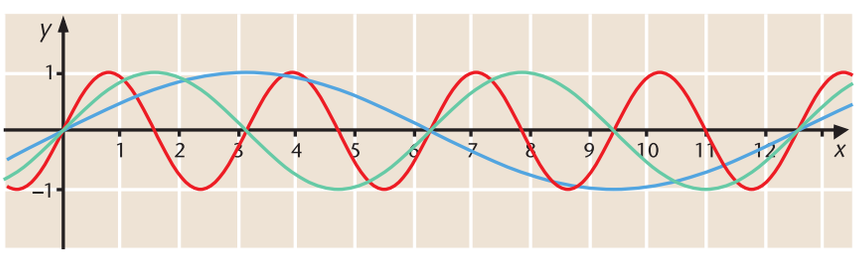
98. Piirrä funktion $f(x) = \sin 4x$ kuvaaja. Hahmottele samaan koordinaatistoon myös funktion $g(x) = \sin x$ kuvaaja ja vertaile kuvaajia.

99. Kuvassa on esitetty funktion $f(x) = \sin 3x$ kuvaaja. Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö välillä $[-2, 1]$. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.
a) $\sin 3x = 0{,}6$
b) $\sin 3x = -0{,}8$



100. Määritä funktion g nollakohdat kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun $g(x) = 4\sin x - 1$.

101. Kuvassa on esitetty funktion $f(x) = \sin kx$ kuvaajia, kun $k = 0{,}5$, $k = 1$ ja $k = 2$.
a) Yhdistä k:n arvo ja oikea kuvaaja.
b) Millainen vaikutus k:n arvolla on funktioon f?

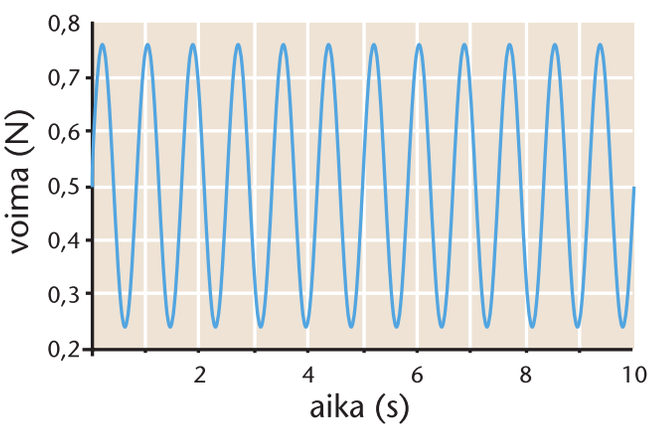


3.2 Sovelluksia

Matematiikan avulla luodaan malleja todellisuudesta. Erityisesti luonnontieteet, kuten fysiikka, kemia ja biologia, soveltavat matematiikkaa. Trigonometrisilla funktioilla mallinnetaan jaksollisia ilmiöitä. Ne ovat välttämätön apuväline myös esimerkiksi klassisessa mekaniikassa. Tässä luvussa esitellään lyhyesti joitakin malleja, joissa keskeisessä osassa ovat trigonometriset funktiot.

Harmoninen värähtely

Harmoninen voima synnyttää liikkeen, jota kutsutaan harmoniseksi värähtelyksi. Esimerkki tällaisesta liikkeestä voisi olla jousen päässä oleva punnus. Sen värähdysliike muodostuu yksittäisistä, samalla tavoin toistuvista liikkeistä yläasennosta ala-asentoon ja takaisin.



Yhteen värähdykseen eli liikkeestä yläasennosta takaisin yläasentoon kuluvaa aikaa sanotaan jaksonajaksi. Poikkeamaa tasapainoasemasta taas kutsutaan amplitudiksi. Ideaalitilanteessa amplitudi säilyy koko ajan samana, vaikka käytännössä se pienenee ajan kuluessa eli värähtely vaimenee. Kokeellisesti on voitu osoittaa, että värähtelijän paikka riippuu sinimuotoisesti ajasta. Paikkaa f voidaan mallintaa funktiolla

$$f(t) = A \sin(bt),$$

jossa t on aika ja A ja b vakioita. Vakio b riippuu värähtelijän massasta ja jousen jousivakiosta.

ESIMERKKI 1

Jousen päässä oleva punnus lepää vaakasuoralla alustalla. Punnusta poikkeutetaan tasapainoasemasta. Punnuksella on alkunopeus $v_0 = 2{,}4\,\text{m/s}$ ja sen massa m = 4,0 kg. Punnuksen paikka f (m) ajan t (s) funktiona on

$$f(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{350}}\sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{350}{m}}\right).$$

Paikalla tarkoitetaan etäisyyttä tasapainoasemasta.

a) Määritä punnuksen paikka hetkellä $t = 0{,}1$ s?

b) Mikä on punnuksen suurin mahdollinen etäisyys tasapainoaseman oikealla puolella?

Kitkan vaikutus ja värähtelyn vaimeneminen jätetään huomioimatta.

RATKAISU

a) Funktio f voidaan esittää muodossa

$$f(t) = 2{,}4\sqrt{\frac{4{,}0}{350}}\sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{350}{4{,}0}}\right).$$

Sijoitetaan $t = 0{,}1$ funktioon f:

$$f(0{,}1) = 2{,}4\sqrt{\frac{4{,}0}{350}}\sin\left(0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{350}{4{,}0}}\right) = 0{,}2064... \approx 0{,}21\ \text{(m)}.$$

b) On etsittävä lausekkeen $2{,}4\sqrt{\frac{4{,}0}{350}}\sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{350}{4{,}0}}\right)$ suurin positiivinen arvo.

Sinin arvo vaihtelee välillä $[-1, 1]$, joten lausekkeen $\sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{350}{4{,}0}}\right)$ suurin arvo on 1. Tällöin

$$2{,}4\sqrt{\frac{4{,}0}{350}}\sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{350}{4{,}0}}\right) = 2{,}4\sqrt{\frac{4{,}0}{350}} \cdot 1 = 0{,}2565... \approx 0{,}26\ \text{(m)}.$$

VASTAUS

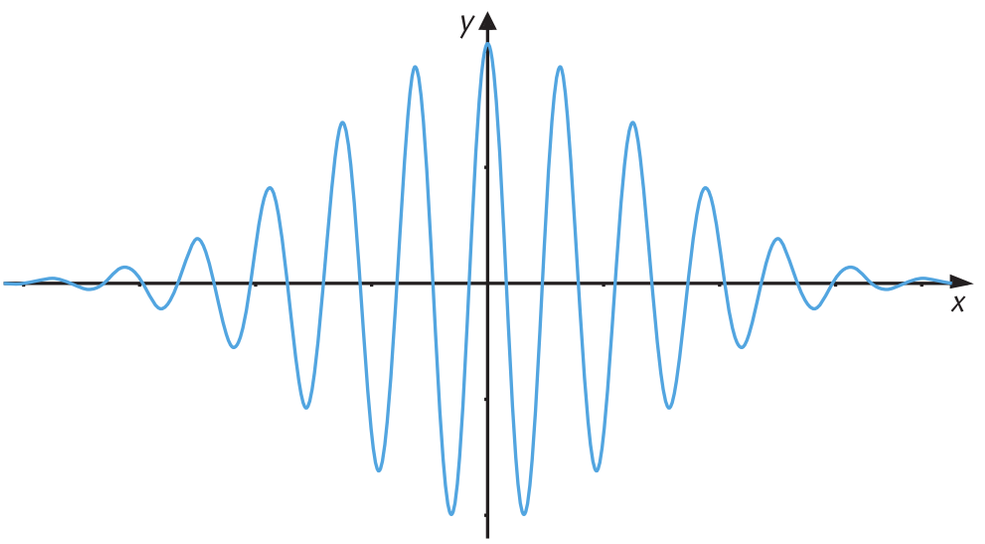
a) Punnus on 0,21 m tasapainoaseman oikealla puolella.

b) 0,26 m

Kvantti-mekaaninen atomimalli

Atomin rakenteen nykyaikainen malli syntyi 1900-luvun aikana usean fyysikon ja kemistin työn tuloksena. Atomi koostuu ytimessä sijaitsevista protoneista ja neutroneista sekä ydintä kiertävistä elektroneista. Juuri elektronien liikettä ja sijaintia selittää kvanttimekaaninen atomimalli.

Kvanttimekaniikassa hiukkasta (esimerkiksi elektronia) kuvataan aaltofunktiolla $\psi(x, y, z, t)$. Aaltofunktion neliön itseisarvo $|\psi^2|$ kuvaa hiukkasen esiintymistodennäköisyyttä tietyllä ajanhetkellä pisteessä (x, y, z). Kuvassa on esitetty erään aaltofunktion kuvaaja. Mitä suurempi on aallon amplitudi, sitä suurempi todennäköisyys elektronilla on sijaita tässä osassa atomia.



Aaltofunktio sisältää useita erilaisia kosiniaaltoja. Yksinkertaisin näistä voidaan esittää muodossa $\psi(x) = A\cos(kx)$, jossa k:n arvo riippuu aallonpituudesta. Kaikille aaltofunktioille pätee Schrödingerin aaltoyhtälö, jonka avulla voimme laskea aaltofunktion muotoa esimerkiksi vetyatomin ainoalle elektronille. Elektronin liikkumista ytimen ympärillä voidaan geometrisesti havainnollistaa kolmiulotteiseen koordinaatistoon piirretyllä pallolla.

Vuorovesi-ilmiö

Kuun ja auringon vetovoiman aiheuttamaa merenpinnan nousua ja laskua kutsutaan vuorovedeksi. Vedenpinnan korkeinta vaihetta sanotaan vuokseksi ja matalinta vaihetta luoteeksi. Vedenpinnan vaihtelu suurten valtamerien rannikoilla voi olla useita metrejä.

Kuun vetovoima ei saa vesimassoja liikkumaan kohti Kuuta. Ilmiö selittyy sillä, että vesimassat liikkuvat kohti sitä maanpinnan pistettä, jossa Kuu on lähinnä Maata. Vuorovesi-ilmiöön vaikuttaa myös se, että Maa ja Kuu kiertävät yhteistä massakeskipistettä. Vesi pyrkii jatkamaan liikettään poispäin tästä pisteestä.

Joskus sekä Auringon että Kuun vuorovesihuippu sattuvat samaan aikaan. Tällöin esiintyy tavallista voimakkaampaa vedenpinnan nousemista ja laskemista, jota kutsutaan tulvavuokseksi ja -luoteeksi.

Maan, Kuun ja Auringon liikkeet toistuvat säännöllisesti likimain samalla tavalla. Näin myös vuoroveden vaihtelu noudattaa samantyyppistä, uudelleen toistuvaa kaavaa. Veden korkeus tietyllä ajanhetkellä voidaankin melko tarkasti ennustaa. Mallinnuksiin sopivat hyvin trigonometriset funktiot jaksollisuutensa vuoksi.

ESIMERKKI 2

Funktio $s(t) = 0{,}4\cos\frac{\pi t}{12} + 2{,}8$ kuvaa veden korkeutta metreinä satamassa. Aika t on tunteja siitä hetkestä, jolloin syvyys oli suurimmillaan. t saa arvoja väliltä $[0, 24]$.

a) Mikä on suurin syvyys? Entä pienin?
b) Määritä syvyys hetkellä $t = 8{,}0$.
c) Millä ajanhetkellä syvyys on 3,0 m?

Kosinin arvot vaihtelevat välillä $[-1, 1]$.

RATKAISU

a) Lausekkeen $\cos\frac{\pi t}{12}$ suurin arvo on 1 ja pienin -1.

Kun $\cos\frac{\pi t}{12} = 1$, veden korkeus satamassa on

$$0{,}4\cos\frac{\pi t}{12} + 2{,}8 = 0{,}4 \cdot 1 + 2{,}8 = 3{,}2 \text{ (m)}.$$

Kun $\cos\frac{\pi t}{12} = -1$, veden korkeus satamassa on

$$0{,}4\cos\frac{\pi t}{12} + 2{,}8 = 0{,}4 \cdot (-1) + 2{,}8 = 2{,}4 \text{ (m)}.$$

Syvyys suurimmillaan on siis 3,2 m ja pienimmillään 2,4 m.

b) Syvyys hetkellä $t = 8{,}0$ on

$$s(8{,}0) = 0{,}4\cos\frac{\pi \cdot 8{,}0}{12} + 2{,}8 = 2{,}6 \text{ (m)}.$$

c) Ratkaistaan yhtälö $s(t) = 3{,}0$:

$$0{,}4\cos\frac{\pi t}{12} + 2{,}8 = 3{,}0$$

$$0{,}4\cos\frac{\pi t}{12} = 0{,}2 \qquad \left| : 0{,}4 \right.$$

$$\cos\frac{\pi t}{12} = 0{,}5$$

$$\frac{\pi t}{12} = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \qquad \left| : \frac{\pi}{12} \right.$$

$$t = \pm 4 + n \cdot 24$$

$t \in [0, 24]$

Syvyys on 3,0 m, kun maksimisyvyydestä on kulunut 4 tuntia.

VASTAUS

a) suurin 3,2 m ja pienin 2,4 m b) 2,6 m c) 4 tunnin kuluttua

Aaltoliike

Aalto on useaan luonnonilmiöön liittyvä suure. Aallot esiintyvät niitä ylläpitävässä väliaineessa. Aalto voi kuljettaa energiaa paikasta toiseen. Aallon väliaineena voi toimia myös tyhjiö (esimerkiksi sähkö- ja magneettivuo). Tavallisia aaltoliikkeen muotoja ovat

- näkyvä valo
- radioaallot
- röntgensäteily
- ääni
- gravitaatioaallot.

Kaikissa aalloissa esiintyviä suureita ovat amplitudi A eli aallonkorkeuden maksimiarvo, aallonpituus λ, jaksonaika T sekä taajuus f. Taajuus ilmoittaa, kuinka monta jaksonaikaa mahtuu yhteen aikayksikköön, esimerkiksi sekuntiin. Usein aalloissa esiintyvä suure on myös kulmanopeus ω. Taajuutta ja kulmanopeutta sitoo toisiinsa yhtälö

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Usein aaltoliikettä voidaan mallintaa funktiolla

$$g(x) = A\cos kx,$$

jossa A kuvaa amplitudia ja k on aallolle tyypillinen vakio. Muuttuja x esittää aikaa.

ESIMERKKI 3

Aaltosarjan yksittäisen aallon korkeutta kuvaa funktio $y(t) = 0{,}006\cos\left(4{,}0t + \frac{\pi}{3}\right)$, jossa t on aika sekunteina. Millä ajanhetkellä aallon korkeus on suurimmillaan, kun $0 \le t \le 3{,}0$?

RATKAISU

Kosinin suurin arvo on yksi, joten aallon suurin korkeus saadaan, kun $\cos\left(4{,}0t + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

$$\cos\left(4{,}0t + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$4{,}0t + \frac{\pi}{3} = 0 + n \cdot 2\pi$$

$$4{,}0t = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \left| :4{,}0 \right.$$

$$t = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$$

Lasketaan aikoja erilaisilla n:n arvoilla.

n	$t = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \frac{\pi}{2}$
0	$t = -\frac{\pi}{12} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = -0{,}261\ldots \approx -0{,}26$
1	$t = -\frac{\pi}{12} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = 1{,}308\ldots \approx 1{,}3$
2	$t = -\frac{\pi}{12} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2{,}879\ldots \approx 2{,}9$
3	$t = -\frac{\pi}{12} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = 4{,}450\ldots \approx 4{,}5$

Lasketuista arvoista välillä $[0;\ 3{,}0]$ ovat 1,3 s ja 2,9 s.

VASTAUS

hetkillä $t = 1{,}3$ s ja $t = 2{,}9$ s

Tehtäviä

102. Punnus, joka roikkuu jousen varassa, värähtelee harmonisesti y-akselin suunnassa. Punnuksen etäisyyttä p (m) tasapainoasemasta esittää funktio

$$p(t) = 0{,}52 \sin 8t,$$

jossa t on aika sekunteina värähtelyn alkamisesta.

a) Määritä punnuksen paikka hetkellä $t = 1{,}0$ s ja $t = 2{,}0$ s.

b) Millä ajanhetkellä punnuksen etäisyys tasapainoasemasta on ensimmäisen kerran 0,20 m?

103. Vuonon reuna on lähes kohtisuora kallio, joka jatkuu kohtisuorana veden alla aina pohjaan saakka. Vuoroveden vaihtelu on tällä alueella voimakasta. Syvyys f on likimain ajan t (tuntia) funktio

$$f(t) = 3{,}8 \sin \frac{\pi(6+t)}{12} + 20{,}6$$

t on aika tunteina hetkestä, jolloin veden syvyys on suurimmillaan.

a) Laske syvyys suurimmillaan ja pienimmillään.

b) Laske syvyys hetkellä $t = 8{,}0$.

104. Pieni purjevene joutuu myrskyyn. Vene keikkuu aallokossa joutuen välillä aallon huipulle ja välillä aallon pohjalle. Veneen sijaintia (korkeutta) aallolla metreinä tyynen merenpinnan tasoon nähden esittää funktio $h(t) = 2{,}8 \cos \frac{\pi t}{4}$, jossa t on aika sekunteina.

a) Mikä on aallon korkeus suurimmillaan?

b) Määritä aallon jaksonaika eli aika, joka veneeltä menee aallon huipulta uudestaan huipulle.

105. Eräällä savannialueella gnuantilooppikannan koko g on vuosien t funktio

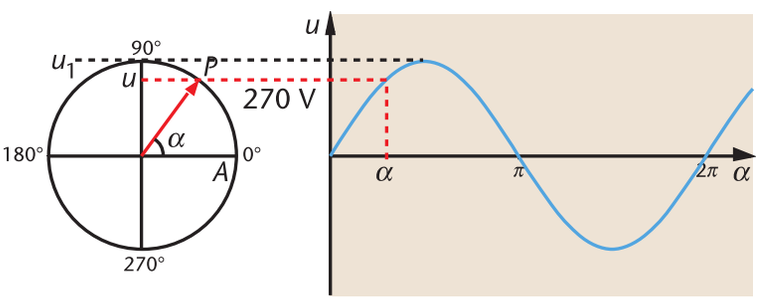
$$g(t) = 4500 \sin\frac{\pi t}{6} + 18000.$$

Kun $t = 0$, kannan koko on ideaalitilanteessa. Kanta voi vielä tästä kasvaa, mutta resurssien vähentyessä se alkaa pienentyä. Ruohoston elpyessä populaatio alkaa taas kasvaa. Edellisen kerran ideaalitilanteessa oltiin vuonna 2000.

a) Laske populaation koko vuonna 2003.

b) Mikä on populaation koko vuonna 2009?

106. Vaihtovirralla tarkoitetaan sähkövirtaa, jossa virran kulkusuunta vaihtelee jaksollisesti. Tällöin jännitekin on jaksollista. Sinimuotoisen vaihtojännitteen huippuarvo on 300 V ja jaksonaika 0,020 s, eli osoitindiagrammissa osoitin tekee tässä ajassa kierroksen. Jännitteen U arvot volteina (V) saadaan kiertokulman α funktiona $U(\alpha) = U_1 \sin\alpha$, jossa U_1 on jännitteen huippuarvo. Kuinka suuren kulman osoitin on kiertynyt vaakatasosta, kun jännitteen arvo on 270 V?



107. Sähkögeneraattori on laite, jolla mekaaninen energia muutetaan sähköenergiaksi. Johdinsilmukkaa pyöritetään magneettikentässä, jolloin sen päiden välille indusoituu jännite. Tämä aiheuttaa suljetussa virtapiirissä virran. Erääseen johdinsilmukkaan indusoitunut jännite U(volttia) riippuu silmukan kiertokulmasta α siten, että $U(\alpha) = 7{,}5 \sin\alpha$.

a) Mikä on silmukan kiertokulma, kun indusoitunut jännite on 7,1 V (volttia)?

b) Laske indusoituneen jännitteen arvo, kun silmukan kiertokulma on 30°.

108. Rullalautailijan korkeutta lähtötasolta metreinä esittää funktio

$$h(x) = 2{,}0\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right),$$

jossa x on aika sekunteina siitä hetkestä alkaen, jolloin lautailija on saavuttanut huippukorkeuden.

a) Määritä edellä mainittu huippukorkeus.

b) Laske kourun syvyys.

109. Jousen päässä roikkuvan punnuksen etäisyyttä tasapainoasemasta (cm) voidaan mallintaa funktiolla $f(t) = -A\sin(kt)$. Lähtöhetkellä $t = 0$ s punnus on tasapainoasemassa. Punnus lähtee liikkeelle alaspäin. Kun aikaa on kulunut 0,4 sekuntia, punnus on ensimmäisen kerran ääriasemassa 12 cm tasapainoaseman alapuolella. Määritä funktio f.

Sekalaisia tehtäviä

110. Vesivoimalan viikkotuotanto E (MWh) vaihtelee sademäärän mukaan ajan t funktiona. Aika t kuvaa viikkoja vuoden alusta. Tammikuun alussa sademäärä on pienin ja $t = 0$.

$$E(t) = 860 - 140\cos\left(\frac{\pi t}{26}\right)$$

a) Kuinka suuri on tuotanto, kun vuoden alusta on kulunut 13 viikkoa?

b) Kuinka paljon on tuotanto suurimmillaan?

111. Maasturi ajaa pitkin rantaviivaa. Vesi ulottuu renkaiden puoliväliin. Auton renkaaseen tarttuu nasta. Auto on hitaassa tasaisessa liikkeessä. Nastan etäisyyttä h (cm) vedenpinnasta määrittelee funktio

$$h(x) = 20\sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right),$$

jossa x on aika sekunteina hetkestä, jolloin nasta on vedenrajassa.

a) Kuinka syvässä vedessä ajetaan?

b) Laske aika, joka kuluu yhteen renkaan pyörähdykseen.

112. Veden syvyys s (m) mittauspaikalla on suurimmillaan keskiyöllä hetkellä $t = 0$, jolloin se on 6,2 m. Pienimmillään se on 12 tuntia myöhemmin, jolloin se on 5,2 m. Määritä kertoimet A ja B, kun $s(t) = A + B\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

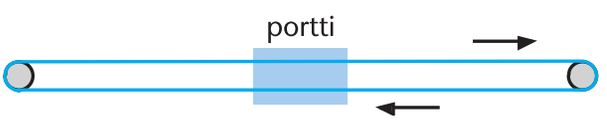
113. Lentokentän tasaiseen liukuhihnaan tarttuu matkustajan kengästä purukumi hihnan puolivälissä olevan uloskäynnin kohdalta. Purukumin paikkaa uloskäynniltä portin kautta kulkevaan pystysuoraan linjaan nähden esittää funktio

$$p(t) = 46\sin\frac{\pi t}{10}.$$

Funktion p yksikkönä on metri, kun aika t on minuutteina.

a) Kuinka kaukana purukumi on portista 2 minuutin kuluttua?

b) Millä hetkellä purukumin etäisyys portista on ensimmäisen kerran 23 m?

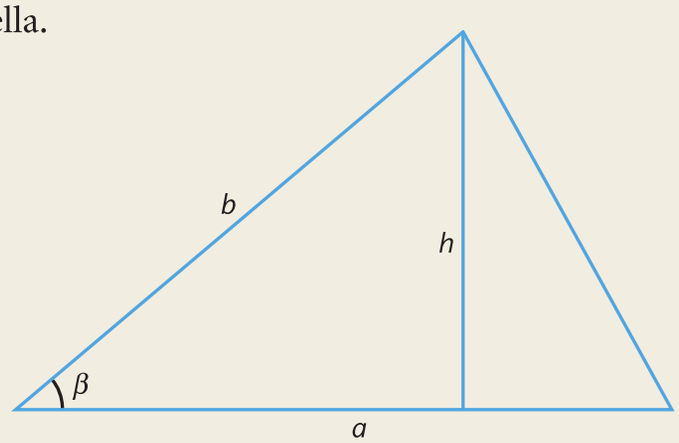


4 Geometriaa

4.1 Kolmion ja suunnikkaan ala

Pohdinta 1

a) Mittaa viivoittimella kanta a ja korkeus h. Laske niiden avulla kolmion ala kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.



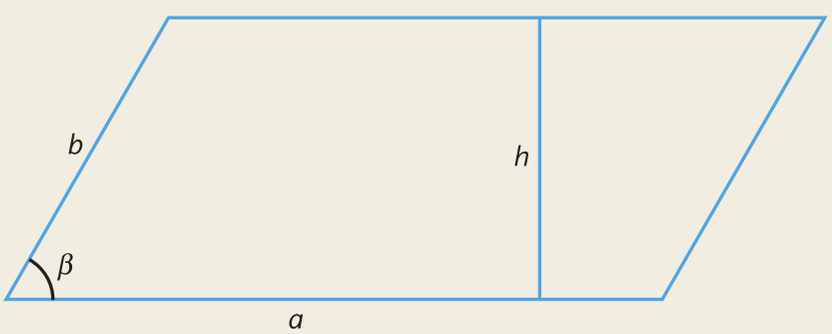
b) Mittaa sivujanan pituus b sekä kulma β. Sijoita mittaustulokset kaavaan

$$\frac{1}{2}ab\sin\beta.$$

Vertaa tätä tulosta a-kohdan tulokseen.

Pohdinta 2

a) Laske suunnikkaan ala sopivien mittausten avulla.



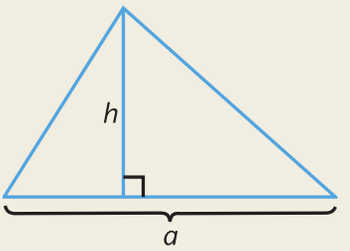
b) Mittaa sivujanan pituus b sekä kulma β. Sijoita mittaustulokset kaavaan

$$ab\sin\beta.$$

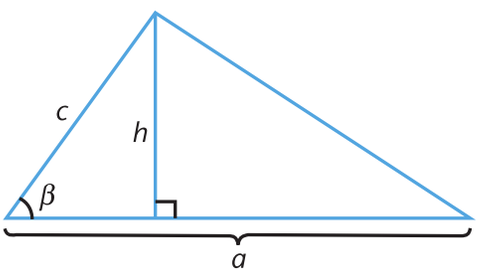
Kolmion pinta-ala voidaan laskea, kun tunnetaan kolmion kanta ja sitä vastaan kohtisuora korkeus:

KOLMION ALA

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{ah}{2}$$



Tarkastellaan kolmiota, jonka kanta on a ja korkeus h sekä yksi sivuista pituudeltaan c. Merkitään sivujen a ja c välistä terävää kulmaa kirjaimella β.



Korkeus h voidaan ratkaista kulman β ja sivun c avulla:

$$\sin\beta = \frac{h}{c}$$

$$\frac{\sin\beta}{1} = \frac{h}{c}$$

Ratkaistaan yhtälöstä h.

$$h = c \cdot \sin\beta$$

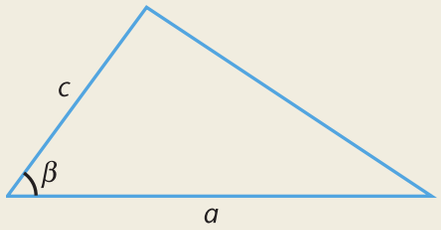
Sijoitetaan saatu h:n lauseke kolmion alan lausekkeeseen.

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

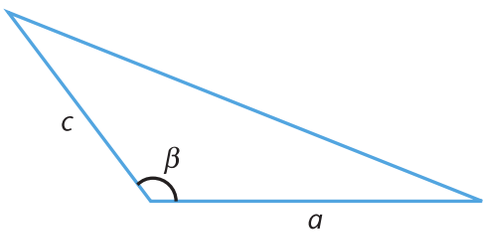
Kolmion ala voidaan siis laskea, vaikka korkeutta ei tunneta. Laskemiseen tarvitaan kolmion kahden sivun pituudet sekä niiden välisen kulman suuruus.

KOLMION ALA

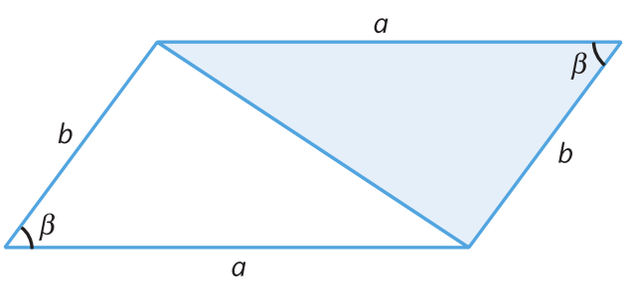
$$A = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$



Saatu tulos voidaan (sinin symmetrian vuoksi) yleistää myös tapauksiin, joissa kulma β on tylppä.



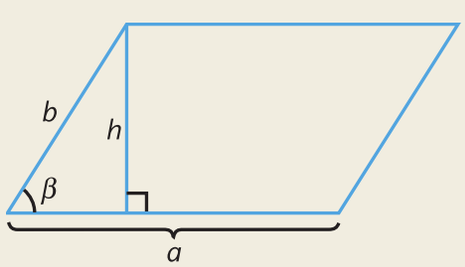
Suunnikas voidaan jakaa lävistäjällä kahdeksi yhteneväksi kolmioksi. Näin myös suunnikkaan ala voidaan laskea, jos tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma.



$$A_{\text{suunnikas}} = 2 \cdot A_{\text{kolmio}} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab\sin\beta = ab\sin\beta$$

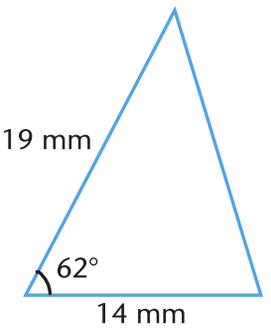
SUUNNIKKAAN ALA

$$A = ah = ab\sin\beta$$

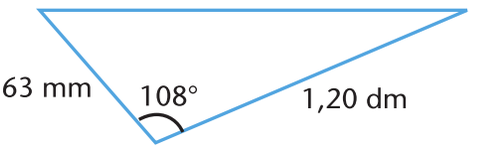


Esimerkki 1 Laske kolmion ala.

a)



b)



Ratkaisu a) Sijoitetaan alan kaavaan pituudet 19 mm ja 14 mm sekä niiden välinen kulma 62°:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ac\sin\beta \\ &= \frac{1}{2}\cdot 14\text{ mm}\cdot 19\text{ mm}\cdot\sin 62° \\ &= 117{,}432...\text{ mm}^2 \\ &\approx 120\text{ mm}^2 \end{aligned}$$

b) Sivujen pituuksien on oltava samassa yksikössä.

$$63\text{ mm} = 0{,}63\text{ dm}$$

Sijoitetaan sivujen pituudet 1,20 dm ja 0,63 dm sekä niiden välinen kulma 108°:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ac\sin\beta \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1{,}20\text{ dm}\cdot 0{,}63\text{ dm}\cdot\sin 108° \\ &= 0{,}3594...\text{ dm}^2 \\ &\approx 0{,}36\text{ dm}^2 \end{aligned}$$

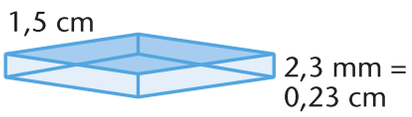
Vastaus a) 120 mm^2 b) 0,36 dm^2

Esimerkki 2

Salmiakkiruutu on muodoltaan suora särmiö, jonka pohjana on neljäkäs. Neljäkkään sivun pituus on 1,5 cm, ja sivujen välinen terävä kulma on 35°. Laske salmiakkiruudun tilavuus, kun ruudun paksuus on 2,3 mm.

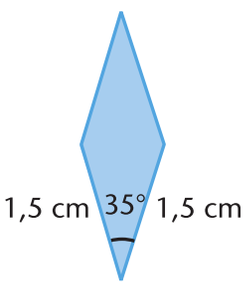
Ratkaisu

Särmiön pohjana oleva neljäkäs on suunnikas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Särmiön tilavuuden laskemiseen tarvitaan pohjan ala.



$$\begin{aligned} A_{\text{pohja}} &= ab\sin\beta \\ &= 1{,}5\text{ cm} \cdot 1{,}5\text{ cm} \cdot \sin 35° \\ &= 1{,}290...\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus} \\ &= 1{,}290...\text{ cm}^2 \cdot 0{,}23\text{ cm} \\ &= 0{,}296...\text{ cm}^3 \\ &\approx 0{,}30\text{ cm}^3 \end{aligned}$$



Vastaus

Salmiakkiruudun tilavuus on 0,30 cm^3.

Esimerkki 3

Kolmion ala on 6,41 m^2. Kolmion kaksi sivua ovat 7,8 m ja 3,5 m. Määritä sivujen välinen kulma asteen tarkkuudella.

Ratkaisu

Merkitään sivujen välistä kulmaa kirjaimella α. Koska kuvio on kolmio, $0° < \alpha < 180°$. Sijoitetaan ala ja sivujen pituudet kolmion alan kaavaan.

$$\frac{1}{2} \cdot 7{,}8 \cdot 3{,}5 \cdot \sin\alpha = 6{,}41$$

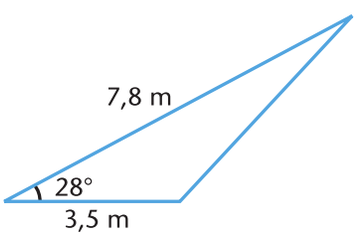
$$13{,}65\sin\alpha = 6{,}41 \quad \big| : 13{,}65$$

$$\sin\alpha = 0{,}469...$$

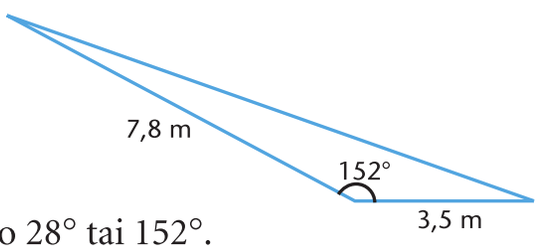
$$\alpha = 28{,}008...°$$

$$\alpha \approx 28°$$

Kulma ratkaistaan laskimen $\sin^{-1}$-toiminnolla.



Siniyhtälön toinen ratkaisu on $180° - 28° = 152°$.



Vastaus

Sivujen välinen kulma on joko 28° tai 152°.

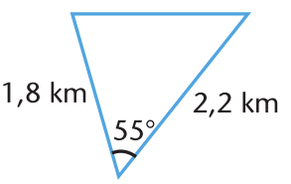
Esimerkki 4

Eräs Keski-Suomessa sijaitseva pieni järvi on likimain kolmion muotoinen. Järven sivujen pituudet ovat 1,9 km, 1,8 km ja 2,2 km. Kahden jälkimmäisen sivun välinen kulma on 55°. Lämpimänä kesäpäivänä jokaisen neliömetrin alalta haihtuu vettä keskimäärin 1,5 dl tunnin aikana. Kuinka monta kuutiometriä vettä järvestä kaikkiaan haihtuu tunnin aikana?

Ratkaisu

Määritetään ensin järven ala sivujen ja kulman avulla.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 1{,}8\,\text{km} \cdot 2{,}2\,\text{km} \cdot \sin 55° \\ &= 1{,}621...\,\text{km}^2 \\ &= 1{,}623... \cdot 10^6\,\text{m}^2 \end{aligned}$$



Koska yhtä neliömetriä kohti haihtuu 1,5 dl, koko järvestä haihtuu

$$\begin{aligned} 1{,}623... \cdot 10^6 \cdot 1{,}5\,\text{dl} &= 2{,}432... \cdot 10^6\,\text{dl} \\ &= 2{,}432... \cdot 10^5\,\text{l} \\ &= 243{,}2...\,\text{m}^3 \\ &\approx 240\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{l}$

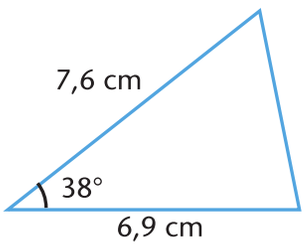
Vastaus

Tunnin aikana haihtuu 240 m^3.

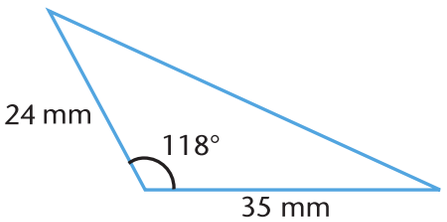
Tehtäviä

114. Laske kolmion ala.

a)

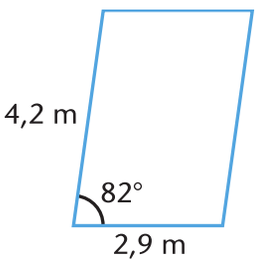


b)

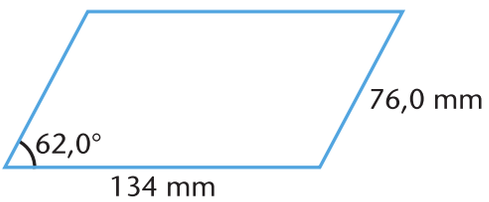


115. Laske suunnikkaan ala.

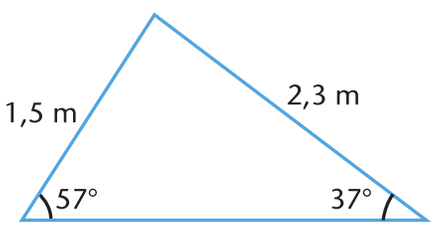
a)



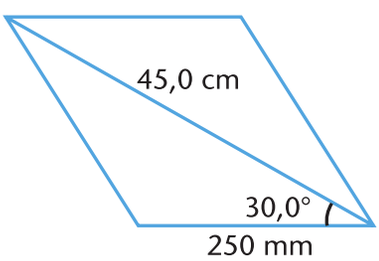
b)



116. Laske kuvan kolmion ala.



117. Laske kuvan suunnikkaan ala.



118. Kolmion kaksi sivua ovat 89 cm ja 61 cm. Laske kolmion ala, kun sivujen välinen kulma on 55°.

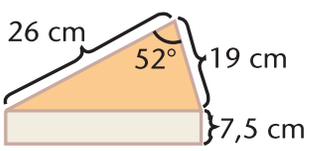
119. Neljäkkään eli vinoneliön sivun pituus on 12,0 dm. Kahden sivun välinen terävä kulma on 60°. Laske neljäkkään ala.

120. Kolmion ala on 100,3 cm^2. Kolmion kaksi sivua ovat 15 cm ja 18 cm. Laske näiden sivujen välisen kulman suuruus asteen tarkkuudella.

121. Kesämökillä oleva luonnonkukkapenkki on muotoiltu suunnikkaan muotoiseksi. Penkin ala on 10,0 m^2, ja erisuuntaisten sivujen pituudet ovat 2,0 m ja 10,0 m. Laske penkin kulmien suuruudet.

122. Talon pihalla on kolmion muotoinen uima-allas. Allas on kaikista kohdista syvyydeltään 1,70 m. Altaan kaksi pisintä reunaa ovat pituudeltaan 23 m ja 18 m. Näiden sivujen välinen kulma on 39°. Kuinka monta litraa vettä altaassa on, kun se on täynnä?

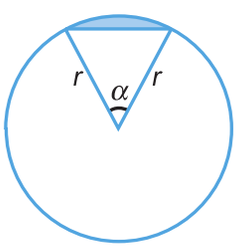
123. Laske täytekakkupalan hinta, kun kakku myydään kilohinnalla 24,50 €/kg. Täytekakun tiheys on keskimäärin $2{,}3\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.



124. Tasasivuisen kolmion pinta-ala on 5,0 m^2. Laske kolmion sivujen pituudet.

125. Kolmion sivuista tiedetään, että kahden sivun suhde on 1:2 ja niiden välinen kulma on 30°. Laske näiden sivujen pituudet, kun kolmion ala on 112,5 dm^2.

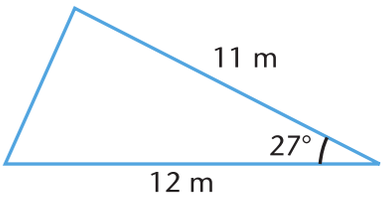
126. Määritä väritetyn segmentin ala A_s ympyrän säteen r ja keskuskulman α avulla. Laske segmentin ala, kun keskuskulma $\alpha = 35°$ ja ympyrän säde on 16,0 cm.



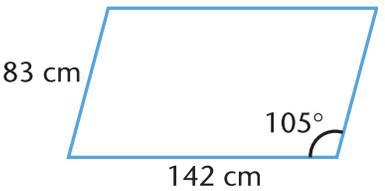
Sekalaisia tehtäviä

127. Laske kuvion ala.

a)



b)



128. Kolmion muotoisen pellon kahden sivun pituudet ovat 280 m ja 360 m. Sivujen välinen kulma on 64°. Kuinka monta kilogrammaa vehnää tätä pellolta korjataan, kun keskimääräinen sato hehtaarilta on 4500 kg?

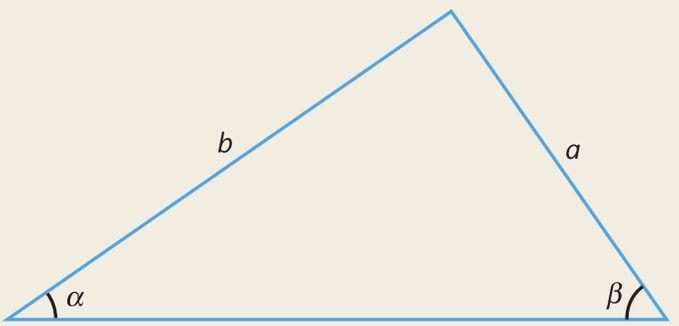
129. Astian pohja on suunnikas, jonka erisuuntaisten sivujen välinen kulma on 150°. Pohjan sivujen pituudet ovat 25 cm ja 56 cm. Laske astian tilavuus litroina, kun astian korkeus on 12 cm.

130. Maljakon pohja on kolmio, jonka kahden sivun pituudet ovat 15 cm ja 17 cm. Maljakon korkeus on 16 cm ja tilavuus 1,8 l. Laske pohjan mainittujen sivujen välinen kulma asteen tarkkuudella.

131. Suunnikkaan sivuista toinen on 3,0 m lyhyempi kuin toinen. Sivujen välinen kulma on 150°. Määritä sivujen pituudet, kun suunnikkaan ala on 464 m^2.

4.2 Sinilause

POHDINTA 1 Mittaa kolmion sivujanat a ja b sekä kulmat α ja β.



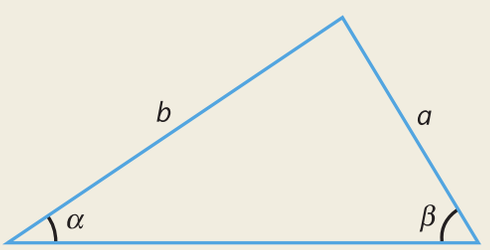
Laske mittaustulosten avulla suhteet $\frac{a}{\sin\alpha}$ ja $\frac{b}{\sin\beta}$.

$\frac{a}{\sin\alpha} =$

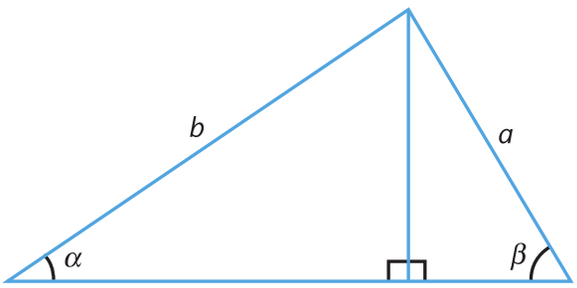
$\frac{b}{\sin\beta} =$

Mitä havaitset?

POHDINTA 2 Kuvan kolmiolle $a = 15$ cm, $\alpha = 34°$ ja $\beta = 59°$. Päättele edellisen tehtävän avulla, miten pituus b saadaan laskettua, ja laske se kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.



Tarkastellaan kolmiota, jonka kahden sivun pituudet ovat a ja b. Sivun, jonka pituus on a, vastaisen kulman suuruus on α. Kulman β vastaisen sivun pituus on b. Lausutaan korkeus h sinin avulla:



$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad | \cdot b$$
$$h = b\sin\alpha$$

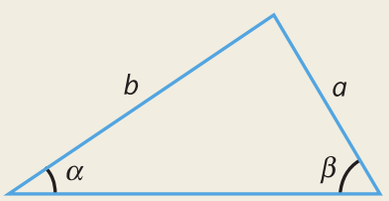
$$\sin\beta = \frac{h}{a} \quad | \cdot a$$
$$h = a\sin\beta$$

$$a\sin\beta = b\sin\alpha \quad | : \sin\alpha$$
$$\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = b \quad | : \sin\beta$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Jos kolmion sivun pituus jaetaan sivun vastaisen kulman sinillä, saatu suhde on sama riippumatta valitusta sivusta ja sitä vastaavasta kulmasta. Tämä tulos tunnetaan *sinilauseena*. Sinilause on voimassa myös tylpille kulmille.

Sinilause

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

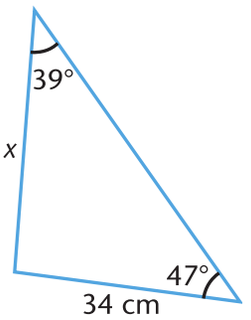


Sinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion sivuja ja kulmia, kun tunnetaan

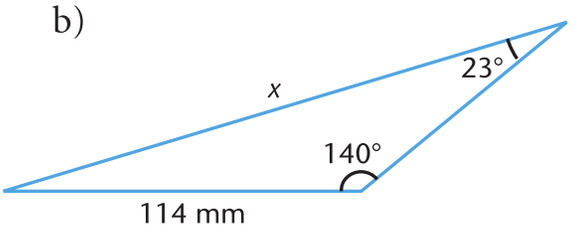
- kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma
- kaksi kulmaa ja toisen kulman vastainen sivu.

ESIMERKKI 1 Ratkaise sivun pituus x.

a)



b)



RATKAISU

a) Kulman 47° vastaisen sivun pituus on x ja kulman 39° vastaisen sivun pituus 34 cm. Sinilauseen mukaan saadaan yhtälö

$$\frac{x}{\sin 47°} = \frac{34}{\sin 39°}$$

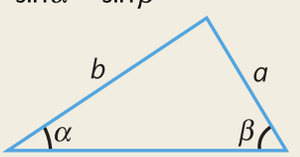
$$x \sin 39° = 34 \sin 47° \quad \big| : \sin 39°$$

$$x = \frac{34 \sin 47°}{\sin 39°}$$

$$x = 39{,}512...$$

$$x \approx 40 \text{ (cm)}$$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$



b) Kulman 140° vastaisen sivun pituus on x ja kulman 23° vastaisen sivun pituus 114 mm. Sinilauseen mukaan saadaan yhtälö

$$\frac{x}{\sin 140°} = \frac{114}{\sin 23°}$$

$$x \sin 23° = 114 \sin 140° \quad \big| : \sin 23°$$

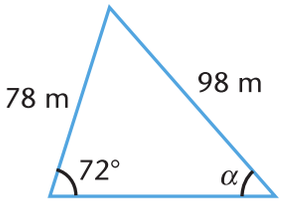
$$x = \frac{114 \sin 140°}{\sin 23°}$$

$$x = 187{,}540...$$

$$x \approx 190 \text{ (mm)}$$

VASTAUS a) 40 cm b) 190 mm

ESIMERKKI 2 Ratkaise kulma α asteen tarkkuudella.



RATKAISU Kulman α vastaisen sivun pituus on 78 m. 72 asteen kulmaa vastaavan sivun pituus on 98 m. Tällöin sinilauseen mukaan

$$\frac{78}{\sin\alpha} = \frac{98}{\sin 72°}$$

$$98\sin\alpha = 78\sin 72° \quad \big| : 98$$

$$\sin\alpha = \frac{78\sin 72°}{98}$$

$$\sin\alpha = 0{,}756...$$

$$\alpha = 49{,}19...° + n \cdot 360° \text{ tai } \alpha = (180 - 49{,}19...)° + n \cdot 360°$$

$$\alpha \approx 49° + n \cdot 360° \qquad \alpha \approx 131° + n \cdot 360°$$

Koska kolmion kulmien summa on 180°, kysytyn kulman on oltava terävä eli ainoa ratkaisu on 49°.

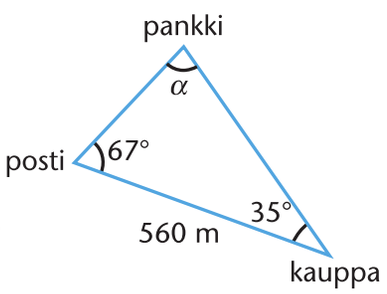
VASTAUS $\alpha \approx 49°$

ESIMERKKI 3 Kylän kaupalta on 560 m pituinen suora tie postiin, josta on suora tie pankkiin. Pankista pääsee edelleen suoraa tietä takaisin kauppaan. Tiet kaupalta pankkiin ja postiin muodostavat 35° kulman. Tiet postista pankkiin ja kauppaan muodostavat 67° kulman. Laske postin ja pankin välisen tien pituus.

RATKAISU Piirretään mallikuva. Merkitään postin ja pankin välisen tien pituutta kirjaimella x. Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\alpha = 180° - 67° - 35° = 78°.$$

Sinilauseen mukaan



$$\frac{560}{\sin 78°} = \frac{x}{\sin 35°}$$

$$x \cdot \sin 78° = 560 \cdot \sin 35° \quad \big| : \sin 78°$$

$$x = 328{,}37...$$

$$x \approx 330 \text{ (m)}$$

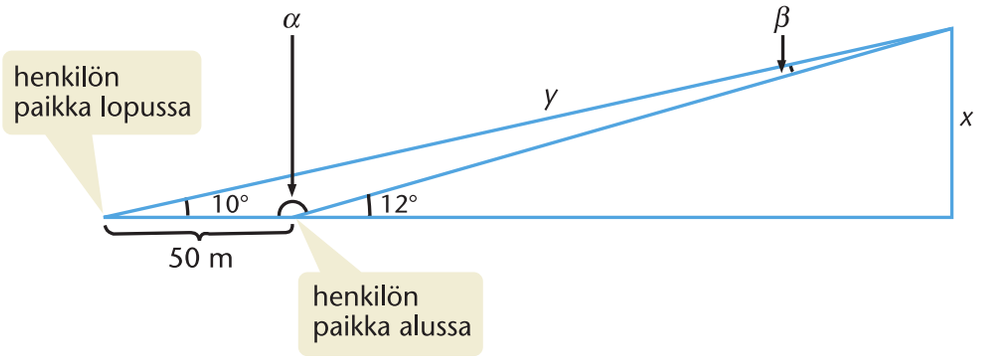
VASTAUS Tien pituus on 330 m.

ESIMERKKI 4

Henkilö seisoo radiomaston edessä. Hän näkee maston huipun 12° kulmassa. Jos hän siirtyy 50 m kauemmaksi mastosta, huippu näkyy 10° kulmassa. Laske radiomaston korkeus. Anna vastaus metrin tarkkuudella.

RATKAISU

Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään radiomaston korkeutta kirjaimella x.



Kulma α ja 12° kulma muodostavat yhdessä oikokulman eli

$$\alpha = 180° - 12° = 168°.$$

Koska kolmion kulmien summa on 180°,

$$\beta = 180° - 168° - 10° = 2°.$$

Sinilauseen mukaan

$$\frac{y}{\sin 168°} = \frac{50}{\sin 2°}$$

$$y \sin 2° = 50 \sin 168° \quad \big| : \sin 2°$$

$$y = \frac{50 \sin 168°}{\sin 2°}$$

$$y = 297{,}87...$$

Määritetään sivun pituus x sinin avulla:

$$\sin 10° = \frac{x}{y}$$

$$\sin 10° = \frac{x}{297{,}87...}$$

$$x = 297{,}87... \cdot \sin 10°$$

$$x = 51{,}724...$$

$$x \approx 52 \text{ (m)}$$

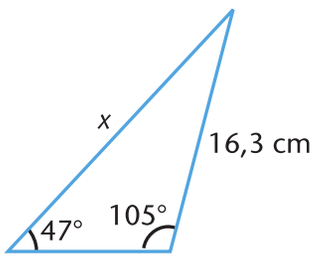
VASTAUS

Radiomaston korkeus on 52 m.

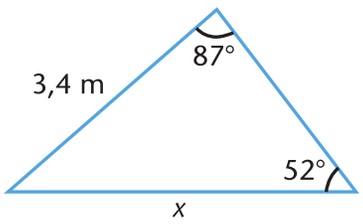
Tehtäviä

132. Ratkaise sivun pituus x.

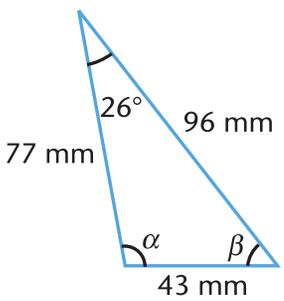
a)

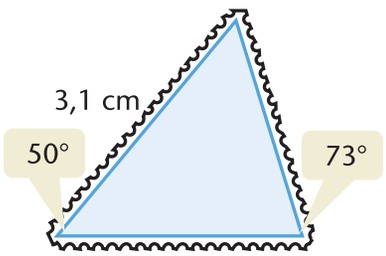


b)



133. Ratkaise alla olevasta kolmiosta puuttuvat kulmat α ja β.





134. Laske yllä olevan postimerkin sivujen pituudet.

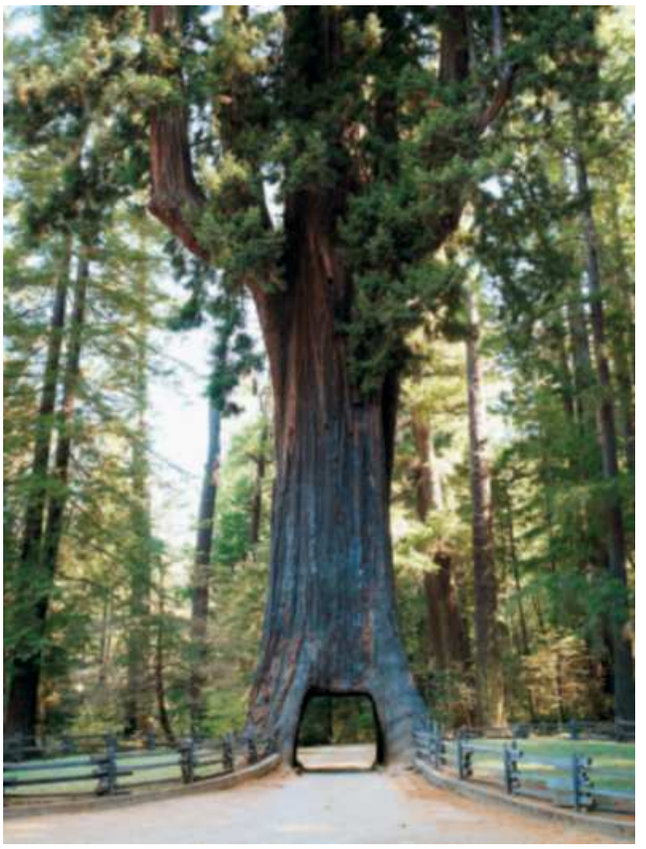
135. Suunnikkaan lävistäjän pituus on 18,5 dm. Lävistäjän vastainen terävä kulma on 65°. Suunnikkaan sivujanan pituus on 16,2 dm. Laske kannan pituus. Piirrä kuva tilanteesta.

136. Kolmiossa ABC sivu AB on 5,0 cm lyhyempi kuin BC. Sivun AB vastainen kulma on 15° ja sivun BC vastainen kulma 52°. Laske kolmion piiri kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

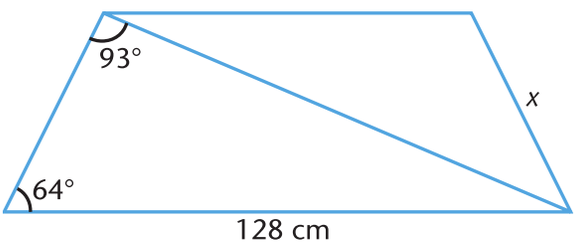
137. Kolmion kaksi sivua ovat 10,2 cm ja 8,70 cm. Jälkimmäisen sivun vastainen kulma on 46°. Laske kolmannen sivun pituus sekä muut kulmat.

138. Tontti on kolmion muotoinen. Sen kulmat ovat 47°, 73° ja 60°. Viimeisen kulman vastaisen sivun pituus on 86 m. Laske tontin hinta, kun alueen tonttien keskimääräinen hinta on 150 €/m^2.

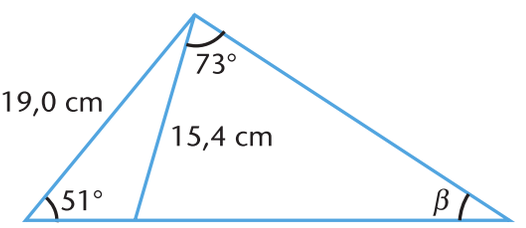
139. Punapuut ovat maailman suurimpia puita. Laura seisoo punapuun edessä. Hän näkee puun 28° kulmassa vaakasuoraan tasoon nähden. Hän siirtyy 15 m kauemmaksi, jolloin puu nähdään 24° kulmassa. Laske puun korkeus.



140. Kuvio on tasakylkinen puolisuunnikas. Laske kuviosta pituus x.



141. Laske kuviosta kulma β asteen kymmenesosan tarkkuudella.



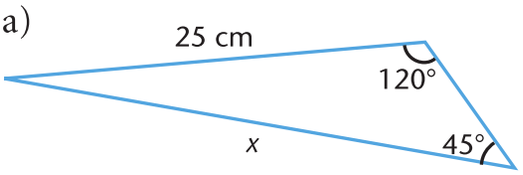
142. Kolmion kulman suuruus on α ja sen vastaisen sivun pituus 9 cm. Toisen kulman suuruus on 2α ja sen vastaisen sivun pituus 16 cm. Määritä α asteen tarkkuudella, kun $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

143. Tasaisella maanpinnalla sijaitsevan tornin huippu näkyy eräästä paikasta katsottuna 3,5° kulmassa vaakatasoon nähden. Tasan puoli kilometriä kauempaa katsottuna kulma on 2,5 astetta. Mikä on tornin korkeus, ja mitkä ovat katseluetäisyydet?
[pitkä oppimäärä S2000, 4]

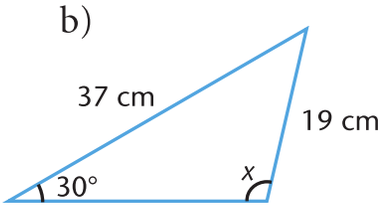
Sekalaisia tehtäviä

144. Ratkaise kuviosta x.

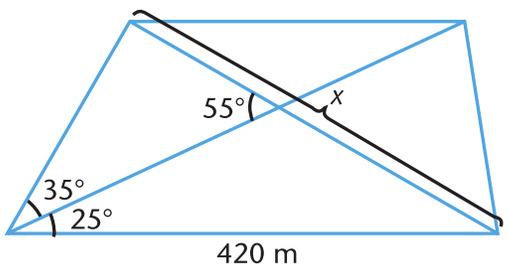
a)



b)



145. Ratkaise kuviosta x.



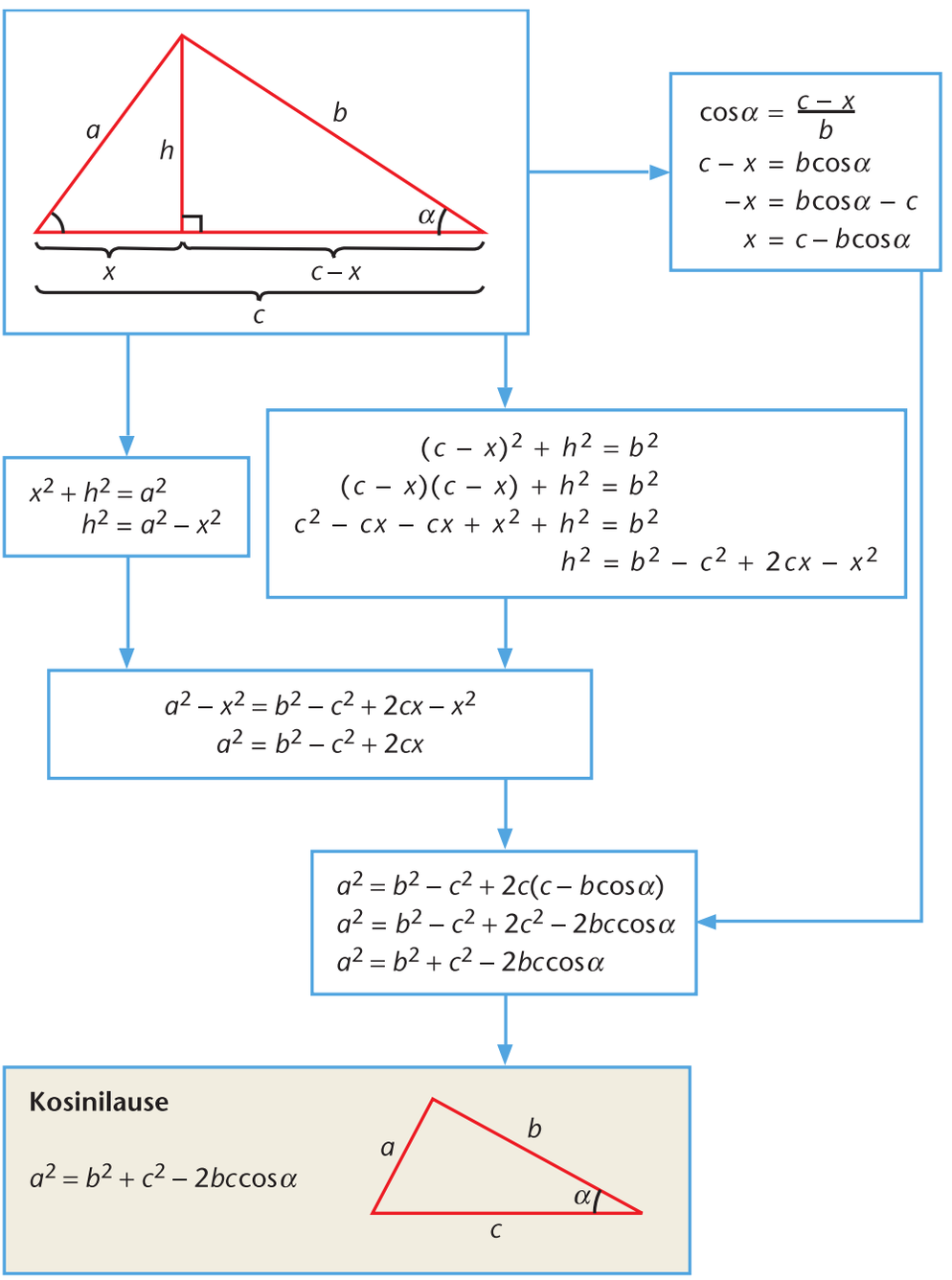
146. Kolmion muotoisen pöydän kahden sivun pituudet ovat 1,3 m ja 2,4 m. Pidemmän sivun vastainen kulma on 130°.
   a) Laske muut kulmat.
   b) Laske pöydän ala.

147. Metallista valmistettu taideteos esittää suoraa pyramidia, jonka pohjana on kolmio. Kolmion kaksi pienintä kulmaa ovat 31° ja 54°. Kulmien väliin jäävän sivun pituus on 1,95 m. Patsaan korkeus on 2,12 m. Kuinka paljon patsas painaa, kun se on valmistettu metalliseoksesta, jonka tiheys on $8{,}1\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?

148. Kaksi tornia ovat yhtä etäällä tarkkailupisteestä. Tähtäyssuunnat torneihin muodostavat 120° kulman, ja tornien välinen etäisyys on 560 m. Kuinka kaukana tornit ovat tarkastelupisteestä?

4.3 Kosinilause

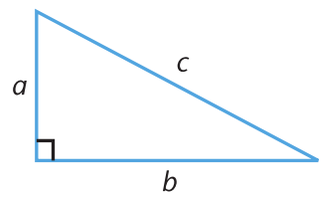
Tarkastellaan kolmiota, jonka sivujen pituudet ovat a, b ja c. Kahden jälkimmäisen sivun välinen kulma on α. Korkeusjanan avulla kolmio voidaan jakaa kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Kirjoitetaan molemmille kolmioille Pythagoraan lause. Eliminoidaan kosinin avulla apumuuttuja x.



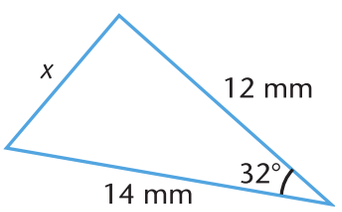
Kosinilause on voimassa kaikille kulmille α, kun $0° < \alpha < 180°$. Lauseen avulla voidaan ratkaista kolmion kolmas sivu, kun kaksi sivua ja niiden välinen kulma tunnetaan. Myös kulmien ratkaiseminen on mahdollista, jos kolmiosta tunnetaan kaikki sivut.

Kun kolmio on suorakulmainen, kosinilause saa Pythagoraan lauseen muodon:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90°$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$



ESIMERKKI 1 Ratkaise kolmiosta sivun pituus x.



RATKAISU Kosinilauseen mukaan

$$x^2 = 14^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \cos 32°$$
$$x^2 = 196 + 144 - 284{,}94...$$
$$x^2 = 55{,}05...$$
$$x = \pm\sqrt{55{,}05...}$$
$$x = \pm 7{,}4199...$$
$$x \approx \pm 7{,}4$$

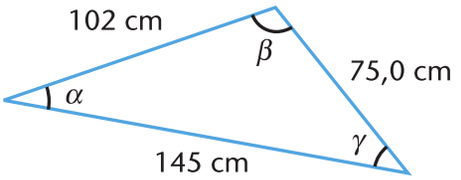
Ratkaistaan toisen asteen yhtälö ottamalla neliöjuuri yhtälön molemmilta puolilta.

Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen luku, $x \approx 7{,}4$ (mm).

VASTAUS Kysytty sivun pituus on 7,4 mm.

ESIMERKKI 2 Kolmion sivujen pituudet ovat 102 cm, 145 cm ja 75,0 cm. Ratkaise kolmion kulmien suuruudet.

RATKAISU Piirretään mallikuva.
Merkitään kolmion kulmia kirjaimilla α, β ja γ.



Ratkaistaan kulma α kosinilauseen avulla.

$$\begin{aligned} 75{,}0^2 &= 102^2 + 145^2 - 2 \cdot 102 \cdot 145 \cdot \cos\alpha \\ 5625 &= 10404 + 21025 - 29580\cos\alpha \\ -25804 &= -29580\cos\alpha \\ -29580\cos\alpha &= -25804 \quad \big| :(-29580) \\ \cos\alpha &= 0{,}872... \\ \alpha &= \pm 29{,}267...^\circ + n \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

Koska $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\alpha \approx 29{,}3^\circ$.

Vastaavalla tavalla ratkaistaan kulma β.

$$\begin{aligned} 145^2 &= 102^2 + 75{,}0^2 - 2 \cdot 102 \cdot 75{,}0 \cdot \cos\beta \\ -15300\cos\beta &= 4996 \quad \big| :(-15300) \\ \cos\beta &= -0{,}326... \\ \beta &= \pm 109{,}058...^\circ + n \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

Myöskin kulmalle β on voimassa ehto $0^\circ < \beta < 180^\circ$, $\beta \approx 109^\circ$.

Koska kolmion kulmien summa on 180°,

$$\gamma = 180^\circ - 29{,}3^\circ - 109^\circ = 41{,}7^\circ.$$

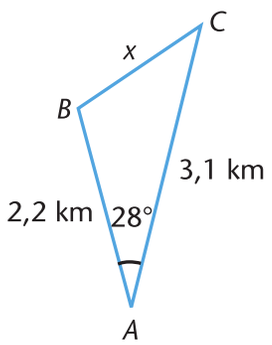
VASTAUS Kolmion kulmat ovat 29,3°, 109° ja 41,7°.

ESIMERKKI 3

Suunnistaja seisoo reitin kolmanneksi viimeisellä rastilla A. Hänen etäisyytensä linnuntietä pitkin seuraavaan rastiin B on 2,2 km ja viimeiseen rastiin C 3,1 km. Kartalla kolme viimeistä rastia muodostavat kolmion, jossa sivujen AB ja AC välisen kulman suuruus on 28°. Laske kahden viimeisen rastin välinen etäisyys.

RATKAISU

Piirretään mallikuva tilanteesta. Merkitään rastien B ja C välistä etäisyyttä kirjaimella x.



Kosinilauseen mukaan

$$x^2 = 2{,}2^2 + 3{,}1^2 - 2 \cdot 2{,}2 \cdot 3{,}1 \cdot \cos 28°$$
$$x^2 = 2{,}406...$$
$$x = \pm 1{,}5513...$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen luku, $x \approx 1{,}6$ (km).

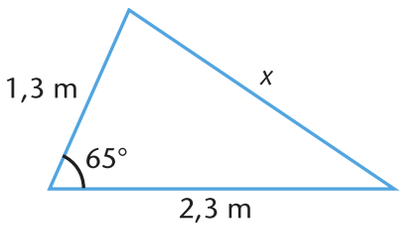
VASTAUS

Kahden viimeisen rastin välinen etäisyys on 1,6 km.

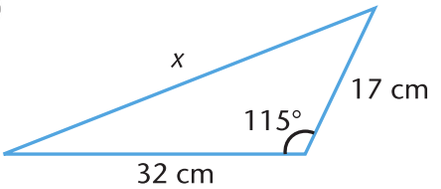
Tehtäviä

149. Laske sivun pituus x.

a)



b)



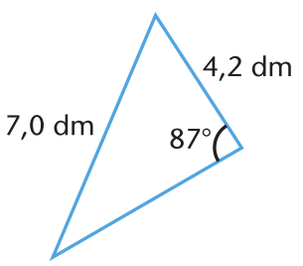
150. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 64 cm ja 124 cm. Näiden sivujen välinen kulma on 135°. Määritä kolmion kolmas sivu ja muut kulmat.

151. Kolmion sivujen pituudet ovat 57 m, 69 m ja 83 m. Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.

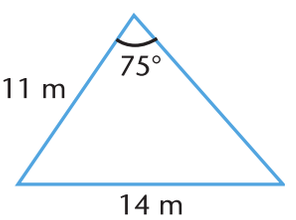
152. Tarunomainen kaupunki Pylypahka sijaitsee 2300 jalkaa Dylypahkasta pohjoiseen ja Sylypahka 5400 jalkaa kaakkoon. Laske Pylypahkan ja Sylypahkan etäisyys linnuntietä mitattuna.

153. Laske puuttuvan sivun pituus kosinilausetta käyttäen.

a)



b)

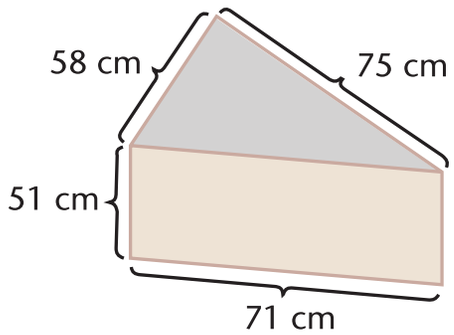


154. Yksi kolmion kulmista on 60°. Tämän kulman viereisistä sivuista toinen on 2,0 m pidempi kuin toinen. Kolmion kolmannen sivun pituus on 4,0 m. Laske muiden sivujen pituudet.

155. Alphonse Island on Intian valtameressä sijaitseva kolmion muotoinen paratiisisaari. Se on tunnettu koralliriutoistaan, jotka suojaavat rannikkoa. Saaren sivujen pituudet ovat 1,2 km, 1,1 km ja 1,3 km. Laske saaren ala.

156. Maija seisoo joen rannalla. Joen toisella rannalla seisoo karitsa (ei kuitenkaan täysin samalla kohdalla). Samalla puolella jokea rannalla seisoo susi vähän matkan päässä karitsasta sitä vaanien. Maijan etäisyys karitsasta on 145 m ja sudesta 230 m. Näiden etäisyysjanojen välinen kulma on 105°. Laske suden etäisyys karitsasta.

157. Kappale on muodoltaan suora särmiö, jonka pohja on kolmion muotoinen. Laske kappaleen tilavuus.



158. Suunnikkaan sivut ovat 142 cm ja 188 cm. Sivujen välinen kulma on 53°. Laske lävistäjien pituudet.

159. Kaksi mastoa näkyy paikkaan, jonka etäisyys toisesta mastosta on 4,3 km ja toisesta 2,7 km. Tähtäyssuunnat mastoihin muodostavat 65° suuruisen kulman. Kuinka etäällä mastot ovat toisistaan, kun etäisyydet mitataan vaakasuorasti?

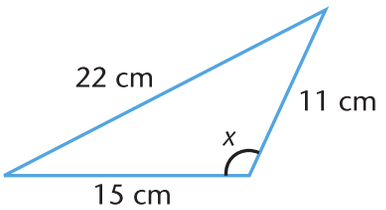
160. Laskettelija näkee kolmen rinteen huiput A, B ja C. Huiput B ja C sijaitsevat tarkastelukohdasta katsottuna peräkkäin: ensin B, sitten C. Huippujen väliset etäisyydet ovat $AB = 2{,}7$ km, $AC = 1{,}5$ km ja $BC = 1{,}9$ km. Huiput A ja B näkyvät tarkastelukohdasta 23° kulmassa. Laske laskettelijan etäisyys huipusta A.

161. Suunnistaja lähti 1350 m päässä olevalle rastille suuntaan, joka poikkesi 4° rastin suunnasta. Kuinka kaukana rastista suunnistaja oli juostuaan suoraan 1350 m? [pitkä oppimäärä S1997, 2b]

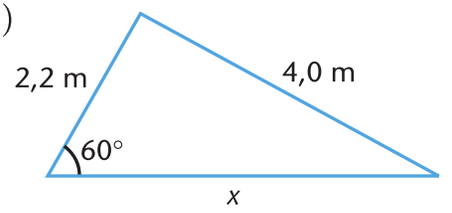
Sekalaisia tehtäviä

162. Ratkaise kuviosta x.

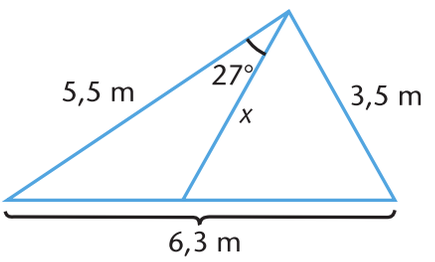
a)



b)



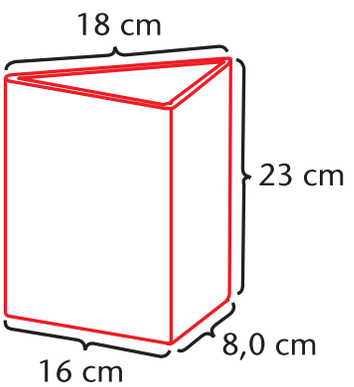
163. Laske pituus x.



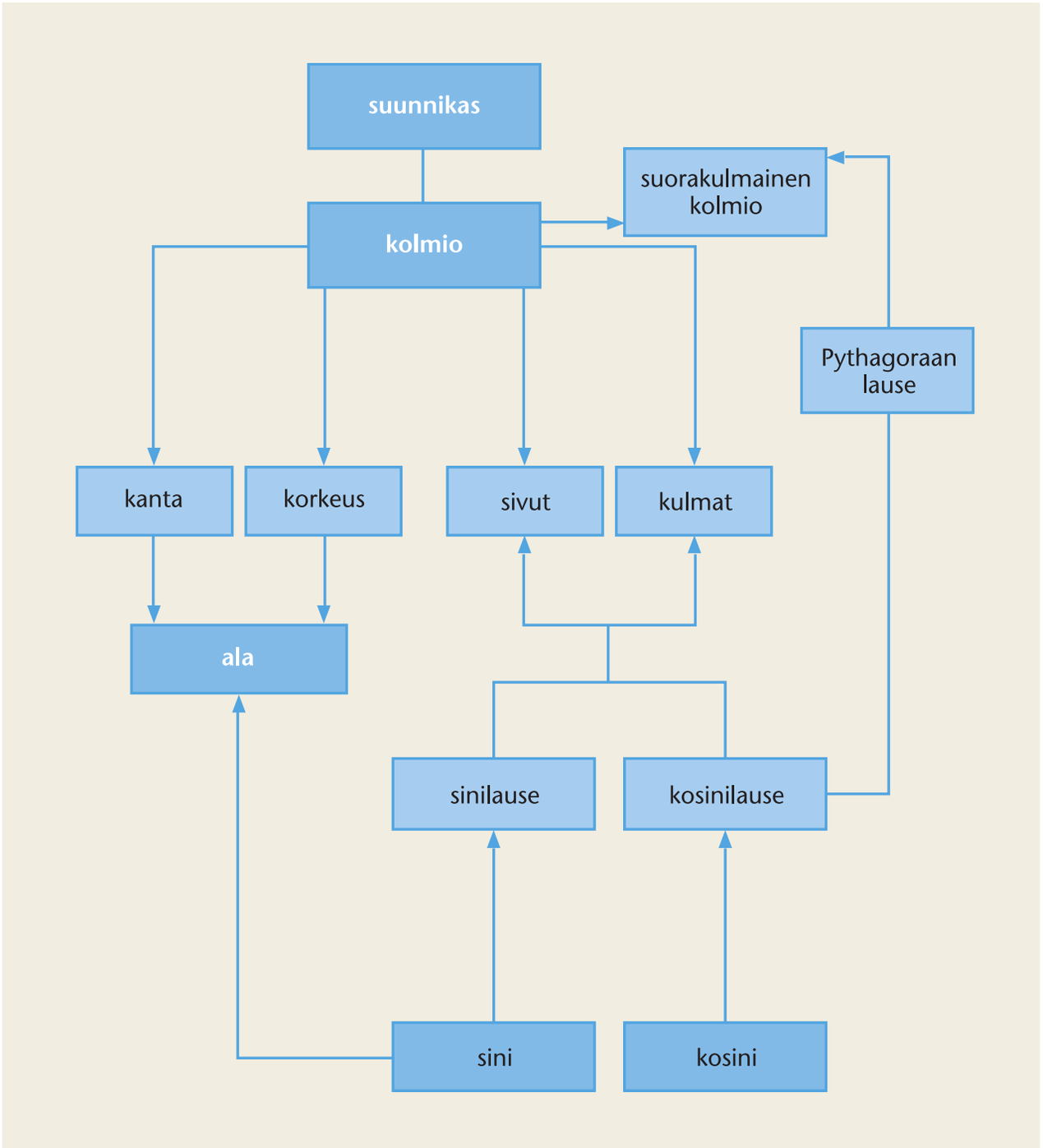
164. Neljäkkään lävistäjän pituus on 18 dm. Lävistäjän vastainen kulma on 70°. Laske neljäkkään sivun pituus.

165. Kolmion sivujen pituudet ovat 25 cm, 35 cm ja 45 cm. Määritä kulmat.

166. Kuvan maljakko on likimain suora särmiö, jonka pohja on kolmion muotoinen. Laske maljakon tilavuus.



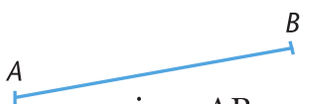
Keskeisiä käsitteitä geometriasta



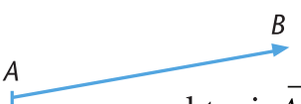
5 Vektorilaskenta

5.1 Peruskäsitteitä

Tarkastellaan janaa AB. Valitaan janalle suunta siten, että janan alkupiste on A ja loppupiste B. Tällöin saadaan suuntajana AB, jota merkitään geometrisesti nuolella. Tätä kutsutaan *vektoriksi.* Vektoria merkitään $\overrightarrow{AB}$ tai $\overline{AB}$. Vektoria voidaan merkitä myös yhdellä symbolilla, esimerkiksi $\overline{a}$.



jana AB

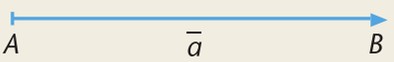


vektori $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}$

Vektorin *pituus* on vastaavan suuntajanan pituus. Tämä on alku- ja loppupisteen välinen etäisyys. Vektorin $\overline{AB}$ pituutta merkitään itseisarvojen avulla $|\overline{AB}|$.

VEKTORI

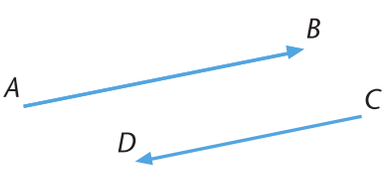
Vektori on suuntajana. Suuntajanalla on pituus ja tietty suunta.



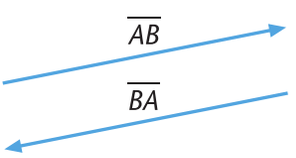
$\overline{AB} = \overrightarrow{AB} = \overline{a} = \overrightarrow{a}$

Jos janan alkupisteeksi valitaan B ja loppupisteeksi A, saadaan vektori $\overline{BA}$. Tämä on yhtä pitkä kuin vektori $\overline{AB}$, mutta *vastakkaissuuntainen.* Suunnan muutos vastakkaiseksi merkitään miinusmerkillä eli $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Koska vektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{AB}$ ovat lisäksi samanpituisia, ne ovat *vastavektoreita.*

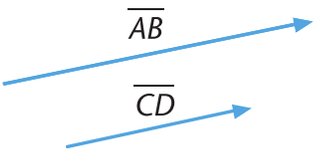


vastakkaissuuntaiset vektorit



vastavektorit $\overline{BA} = -\overline{AB}$
$|\overline{BA}| = |\overline{AB}|$

Vektorin $\overline{AB}$ kanssa *samansuuntainen* vektori voi olla esimerkiksi $\overline{CD}$, jos sen suunta on sama. Samansuuntaisten vektoreiden ei tarvitse välttämättä olla yhtä pitkiä.



Vastakkaissuuntaiset ja samansuuntaiset vektorit ovat *yhdensuuntaisia* keskenään.

Jos vektorilla $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ on sama suunta ja pituus, ne ovat *identtiset* eli samat. Tällöin merkitään $\overline{a} = \overline{b}$.

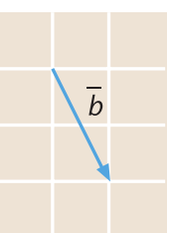
VEKTOREIDEN YHTÄSUURUUS

$\overline{a} = \overline{b}$, kun pituudet ovat samat eli $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ ja suunta sama eli $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.

Vektoreille on ominaista vain pituus ja suunta. Esimerkiksi nopeus ja voima ovat *vektorisuureita*. Aika, pituus ja massa ovat *skalaarisuureita*, koska niillä on vain suuruus muttei suuntaa. Vektorin sijainti voidaan valita vapaasti.

ESIMERKKI 1

Piirrä vektorin $\overline{b}$
a) kanssa samansuuntainen vektori
b) kanssa erisuuntainen vektori
c) vastavektori.

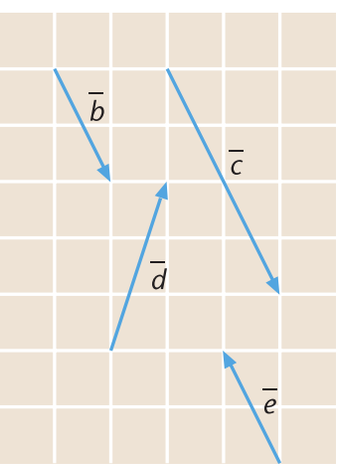


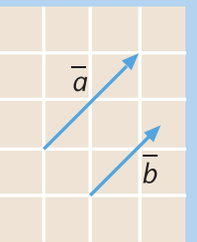
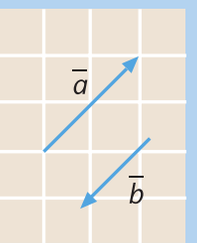
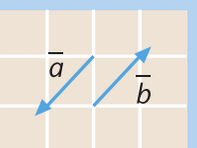
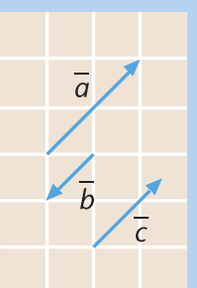
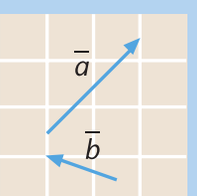
RATKAISU

a) Samansuuntainen vektori voi olla eripituinen kuin vektori $\overline{b}$. Vektorin suunnan tulee kuitenkin olla sama. Tällainen vektori on esimerkiksi vektori $\overline{c}$.

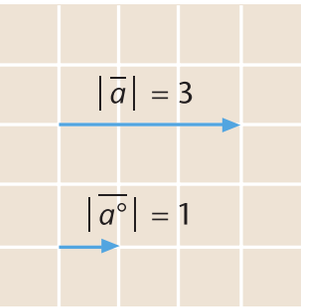
b) Erisuuntainen vektori ei ole samansuuntainen eikä vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa. Tällainen vektori on esimerkiksi $\overline{d}$.

c) Vastavektori $\overline{e}$ on samanpituinen mutta vastakkaissuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa.



Vektoreiden ominaisuus	Selitys	Merkintätapa	Esimerkki
Samansuuntaisuus	– vektoreilla sama suunta – vektoreiden ei tarvitse olla yhtä pitkiä – ovat yhdensuuntaisia	$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$	
Vastakkaissuuntaisuus	– vektori suuntautuu vastakkaiseen suuntaan vertailuvektoriin nähden – vektoreiden ei tarvitse olla yhtä pitkiä – ovat yhdensuuntaisia	$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$	
Vastavektori	– vastakkaissuuntainen ja yhtä pitkä vertailuvektoriin nähden	$\bar{b} = -\bar{a}$ tai $\bar{a} = -\bar{b}$	
Yhdensuuntaisuus	– vektorit ovat joko samansuuntaisia tai vastakkaissuuntaisia – vektorit voidaan asettaa peräkkäin niin, että ne muodostavat janan	$\bar{a} \parallel \bar{b}$ $\bar{a} \parallel \bar{c}$ $\bar{b} \parallel \bar{c}$	
Erisuuntaisuus	– vektorit eivät ole yhdensuuntaisia	$\bar{a} \nparallel \bar{b}$	

Kun vektori jaetaan pituudellaan, saadaan yhden pituusyksikön mittainen vektori eli *yksikkövektori*. Vektorin $\overline{a}$ yksikkövektoria merkitään $\overline{a^\circ}$.



YKSIKKÖVEKTORI

Vektorin $\overline{a}$ yksikkövektori on

$\overline{a^\circ} = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, jossa $|\overline{a}|$ on vektorin $\overline{a}$ pituus.

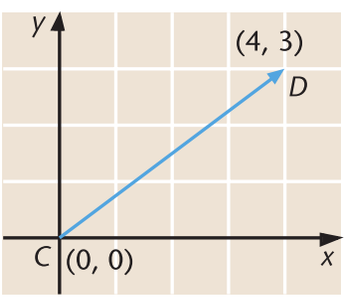
Jos suuntajanan alku- ja loppupiste on sama piste, suuntaa ei ole määrätty ja pituus on nolla. Kyseessä on *nollavektori*. Tätä merkitään $\overline{0}$.

ESIMERKKI 2

Kuntoilija tekee lihasliikettä jalkaprässillä. Hän työntää jalkojaan suoriksi voimalla, jota kuvaa vektori $\overline{CD}$.

a) Laske vektorin $\overline{CD}$ pituus.

b) Piirrä yksikkövektori $\overline{CD^\circ}$.



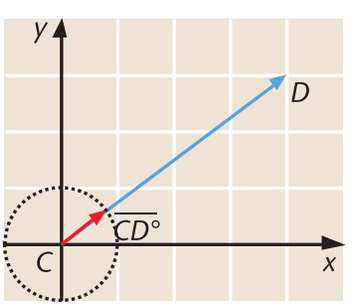
RATKAISU

a) Vektorin pituus on sama kuin janan CD pituus. Janan pituus koordinaatistossa saadaan laskemalla kahden pisteen välinen etäisyys.

janan pituus
$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Janan CD pituus on $\sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$.

b) Vektorin $\overline{CD^\circ}$ pituus on 1 yksikkö eli viidesosa vektorista $\overline{CD}$.
Yhden yksikön pituinen osa vektoria saadaan piirtämällä esimerkiksi piste C keskipisteenä yhden yksikön säteinen ympyrä.



VASTAUS

a) $|\overline{CD}| = 5$

Esimerkki 3

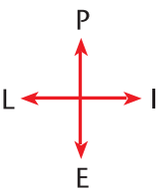
Kolme laivaa lähti samasta satamasta eri suuntiin. Werneri seilasi nopeudella 15 solmua/tunti suoraan pohjoiseen. Wäiski nopeudella 10 solmua/tunti itään ja Wellamo länteen samalla nopeudella.

a) Piirrä vektorikuva laivojen nopeuksista.

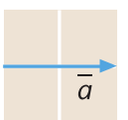
b) Onko nopeusvektoreiden joukossa yhdensuuntaisia vektoreita?

Ratkaisu

Määritetään ilmansuunnat seuraavasti.



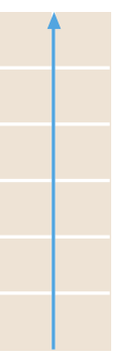
a) Piirretään nopeuksia kuvaavat vektorit mittasuhteiltaan oikean suuruisina. Sovitaan, että nopeutta 5 solmua/tunti itään kuvaa vektori $\overline{a}$.

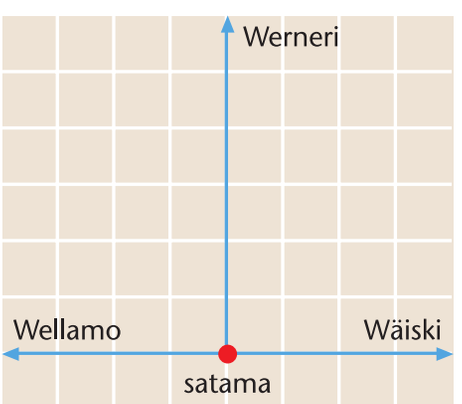


Tällöin nopeutta 10 solmua/tunti itään kuvaava vektori on pituudeltaan kaksinkertainen mutta samansuuntainen.

Vektori, joka kuvaa nopeutta 10 solmua/tunti länteen, on edellisen vastavektori. Se on siis yhtä pitkä mutta vastakkaissuuntainen.

Nopeus 15 solmua/tunti pohjoiseen on kohtisuorassa edellisiä vektoreita vastaan ja pituudeltaan kolminkertainen vektoriin $\overline{a}$ nähden.





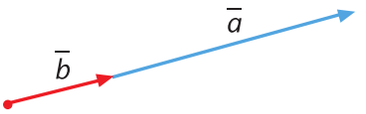
b) Saman- tai vastakkaissuuntaiset vektorit ovat yhdensuuntaisia keskenään. Wellamon ja Wäiskin nopeusvektorit ovat yhdensuuntaisia.

Vastaus

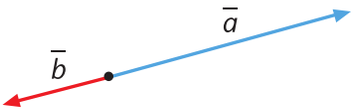
b) Wellamo ja Wäiski

Kun kaksi vektoria $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ siirretään alkamaan samasta pisteestä, muodostuu vektorien väliin kulma $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b})$. Vektorien välinen kulma on aina välillä $[0°, 180°]$.

Kun samansuuntaiset vektorit siirretään alkamaan samasta pisteestä, ne sijaitsevat päällekkäin. Tällöin niiden välinen kulma on 0°.

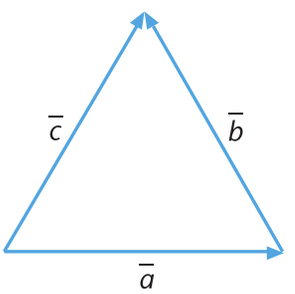


Vastakkaissuuntaiset vektorit muodostavat oikokulman, eli niiden välinen kulma on 180°.



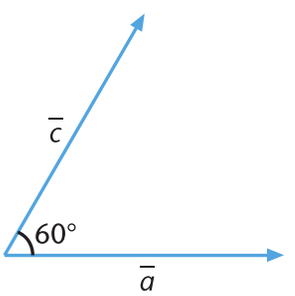
ESIMERKKI 4

Vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ muodostavat tasasivuisen kolmion. Määritä vektoreiden
a) $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ välinen kulma
b) $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma.

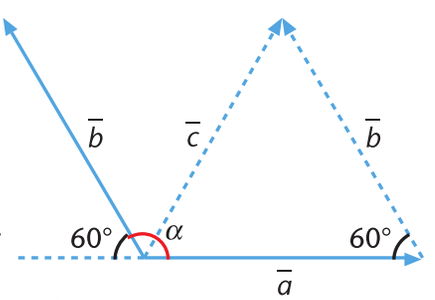


RATKAISU

a) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ lähtevät samasta pisteestä, joka on tasasivuisen kolmion kärkipiste. Kolmion kaikki kulmat ovat 60°, joten myös vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ välinen kulma on 60°.



b) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät lähde samasta pisteestä, joten ne on asetettava alkamaan samasta pisteestä ennen kuin niiden välinen kulma voidaan määrittää.



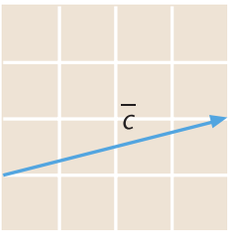
Muodostuu kaksi samankohtaista kulmaa, jotka ovat 60°.

Vektoreiden välinen kulma on $\alpha = 180° - 60° = 120°$.

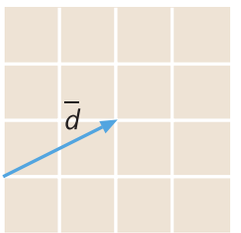
VASTAUS a) 60° b) 120°

Tehtäviä

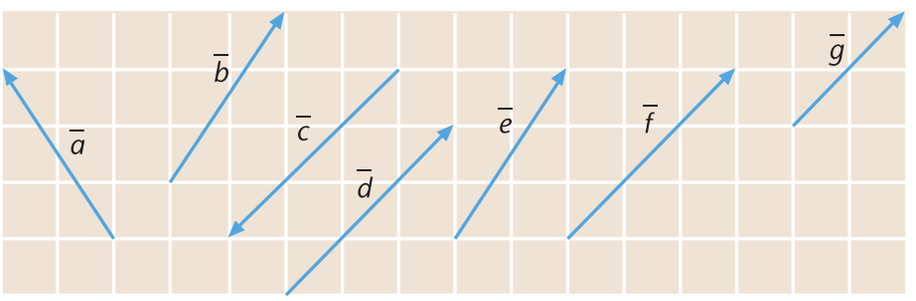
167. Piirrä annetun vektorin $\overline{c}$ kanssa kaksi
a) samaa vektoria
b) samansuuntaista vektoria.



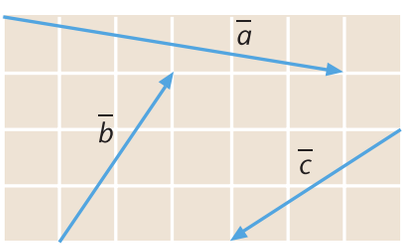
168. Piirrä annetun vektorin $\overline{d}$ kanssa kaksi
a) vastavektoria
b) vastakkaissuuntaisia vektoreita.



169. Poimi vektoreiden joukosta
a) yhdensuuntaiset vektorit b) vastavektorit
c) samat vektorit.

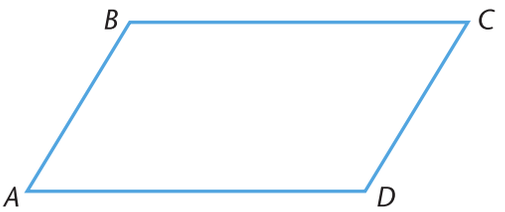


170. Piirrä vektori $\overline{d}$, jolle on voimassa ehto
a) $\overline{d} \uparrow\uparrow \overline{a}$
b) $\overline{d} \parallel \overline{b}$
c) $\overline{d} \uparrow\downarrow \overline{c}$.



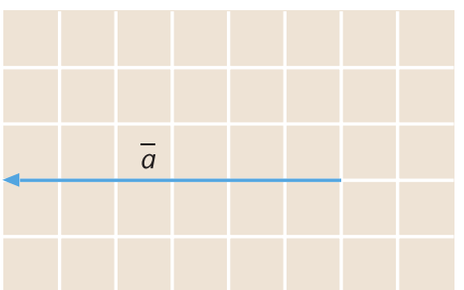
171. Vektorin $\overline{AB}$ alkupiste A on koordinaatistossa $(1, 0)$ ja loppupiste B on $(1, 5)$. Lisäksi $C = (1, -6)$, $D = (1, 6)$, $E = (1, 8)$ ja $F = (1, -5)$.
a) Piirrä vektorit $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ ja $\overline{AF}$.
b) Mitkä mainituista vektoreista ovat yhdensuuntaisia vektorin $\overline{AB}$ kanssa?
c) Mitkä mainituista vektoreista ovat samansuuntaisia vektorin $\overline{AB}$ kanssa?
d) Mitkä mainituista vektoreista ovat yhtä pitkiä kuin vektori $\overline{AB}$?

172. Suunnikkaan kärkipisteet ovat A, B, C ja D. Suunnikkaan sivujanat voidaan ajatella vektoreiksi, kuten $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.
a) Mitkä vektorit ovat yhdensuuntaisia keskenään?
b) Mitkä vektorit ovat samansuuntaisia keskenään?
c) Mitkä vektorit ovat vastakkaissuuntaisia?

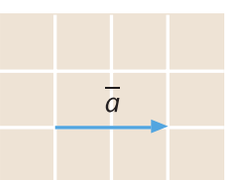


173. Laske vektorin $\overline{AB}$ pituus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun
a) $A = (0, 0)$ ja $B = (4, 8)$ b) $A = (-2, -5)$ ja $B = (1, 10)$.

174. Piirrä vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ yksikkövektorit, kun $|\overline{a}| = 3$ ja $|\overline{b}| = 3$.



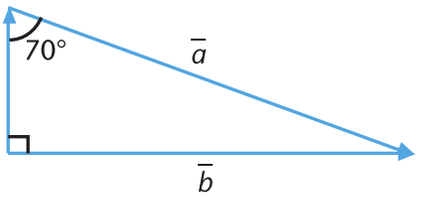
175. Vektori $\overline{a}$ kuvaa nopeutta $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ itään. Piirrä tuulta kuvaava vektori, kun tuulen suunta on
a) pohjoiseen ja nopeus on $3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
b) idästä ja nopeus on $2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.



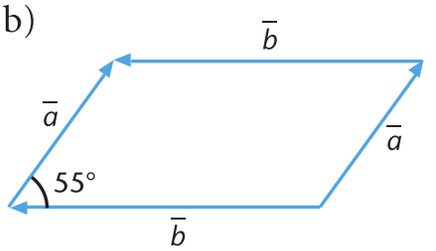
176. Virtasen auton nopeutta kuvaa vektori $\overline{a}$. Tämän vektorin alkupiste koordinaatistossa on $(0, 0)$ ja loppupiste $(3, 6)$. Auton vauhti eli vektorin $\overline{a}$ pituus on 80 km/h.
a) Piirrä vektori $\overline{a}$.
b) Vastaantulevalla kaistalla ajaa samaa nopeutta auto, jolla on sama vauhti. Kuvaa tämän auton nopeusvektori $\overline{b}$ koordinaatistossa.
c) Moottoritiellä Virtasen auton ohittaa auto, jonka vauhti on 120 km/h. Esitä tämän auton nopeusvektori $\overline{c}$ koordinaatistossa.

177. Laske vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma.

a)



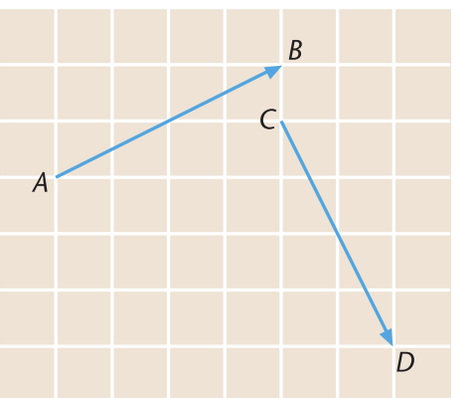
b)



178. Kolmio ABC on tasakylkinen. Sen huippukulma B on 20°. Kolmion sivuina ovat vektorit $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ja $\overline{BC}$. Laske vektorien
a) $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ b) $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ välinen kulma.

Sekalaisia tehtäviä

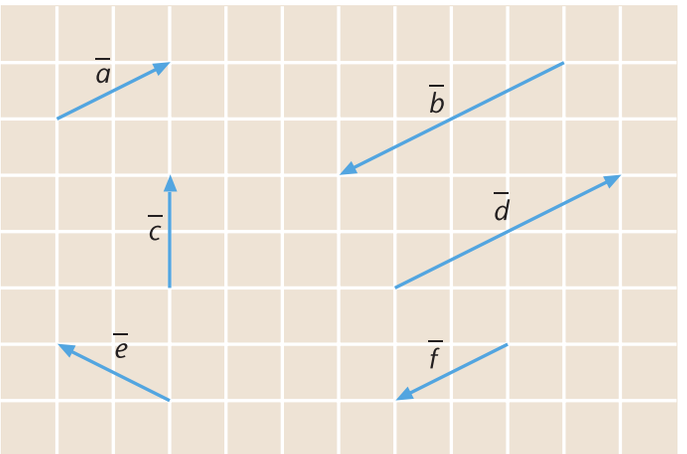
179. Piirrä
a) vektorin $\overline{AB}$ vastavektori
b) vektorin $\overline{CD}$ kanssa samansuuntainen vektori, jonka pituus on puolet vektorin $\overline{CD}$ pituudesta.



180. Vektorin $\overline{a}$ alkupiste koordinaatistossa on (–2, –2) ja loppupiste (1, 2). Piirrä sellainen vektori,
a) joka on yhtä pitkä kuin $\overline{a}$, mutta ei ole yhdensuuntainen sen kanssa
b) joka on samansuuntainen, mutta kaksi kertaa niin pitkä kuin $\overline{a}$
c) joka on yhtä pitkä kuin $\overline{a}$, mutta on kohtisuorassa vektoria $\overline{a}$ vastaan.

181. Määritä kuvan avulla kaikki ne vektorit $\vec{x}$, joille on voimassa ehto

a) $|\vec{a}| = |\vec{x}|$ b) $\vec{a} \parallel \vec{x}$ c) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{x}$ d) $\vec{a} \not\parallel \vec{x}$.



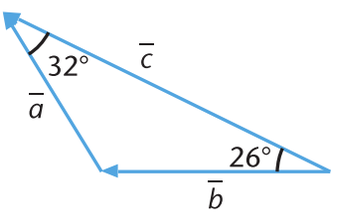
182. Vektorin $\vec{a}$ alkupiste koordinaatistossa on (0, 0) ja loppupiste (–3, 1).

a) Piirrä $\vec{a}$ ja $-\vec{a}$. b) Piirrä $\vec{a^\circ}$. c) Laske $|\vec{a}|$.

183. Kolmion kärkipisteet ovat $A(0, 0)$, $B(-2, 5)$ ja $C(0, 5)$. Laske vektorin $\overline{AB}$ pituus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Piirrä lisäksi vektori $\overline{AD}$, jolle ovat voimassa seuraavat ehdot:

1) $\overline{AD} \uparrow\downarrow \overline{AB}$ 2) $|\overline{AD}| = |\overline{AB^\circ}|$.

184. Kolmion sivuvektorit ovat $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Laske sivuvektorien väliset kulmat.

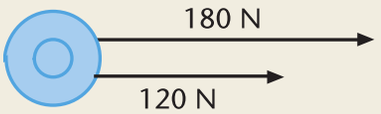


5.2 Laskutoimitukset

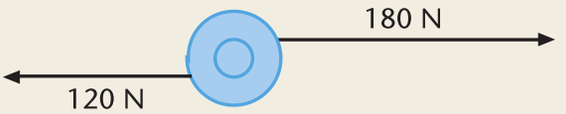
POHDINTA 1

Pekka ja Jalmari työntävät pyöreää rullaa voimilla 180 N ja 120 N.

Tilanne A



Tilanne B



- Kuinka suurella voimalla yhteensä rullaa työnnetään?

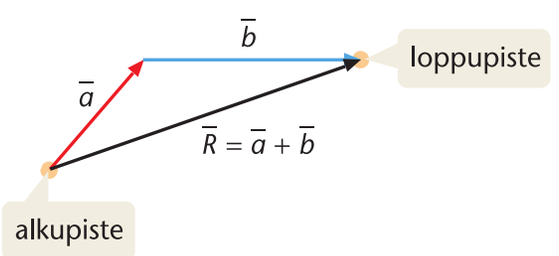
- Piirrä annettujen voimavektoreiden avulla yhteisvoimaa kuvaava vektori.

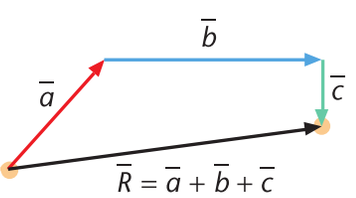
- Miten voimien summavektori on muodostettu?

Summa ja erotus

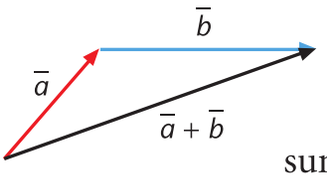
Vektorit lasketaan yhteen liittämällä ne peräkkäin suuntansa ja pituutensa säilyttäen. Vektorit muodostavat peräkkäin asetettuina ketjun, jossa edellisen vektorin loppupisteeseen yhdistetään aina seuraavan vektorin alkupiste.

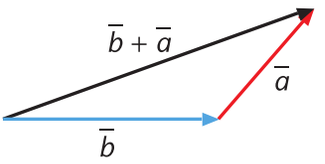
Summavektori eli *resultantti* $\overline{R}$ saadaan yhdistämällä ensimmäisen vektorin alkupiste viimeisen kärkeen.





Summa noudattaa vaihdantalakia, eli summa on sama yhteenlaskettavien järjestyksestä riippumatta.

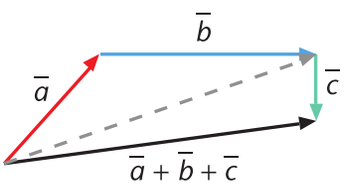


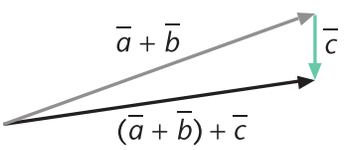


summavektorit samat:
- suunta sama
- pituus sama

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$$

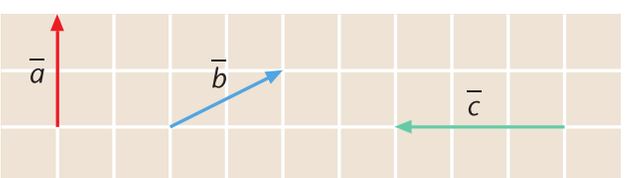
Summa noudattaa myös liitäntälakia, eli summa on sama yhteenlaskettavien ryhmittelystä riippumatta.



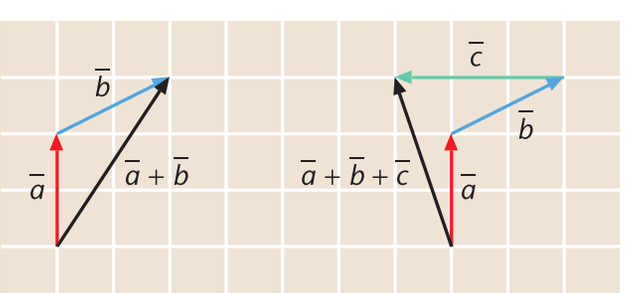


$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$$

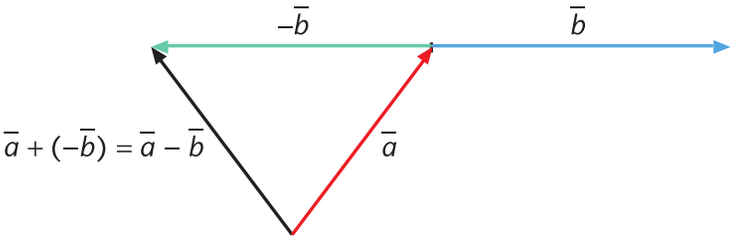
ESIMERKKI 1 Muodosta summavektorit $\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.



RATKAISU Liitetään annettuja vektoreita $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ peräkkäin niin, että muodostuu haluttu vektori. Vektorin $\overline{b}$ alkupiste on sama kuin vektorin $\overline{a}$ loppupiste. Vektorin $\overline{c}$ alkupiste on sama kuin vektorin $\overline{b}$ loppupiste.



Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ erotus saadaan lisäämällä vektorin $\overline{b}$ vastavektori eli $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$.

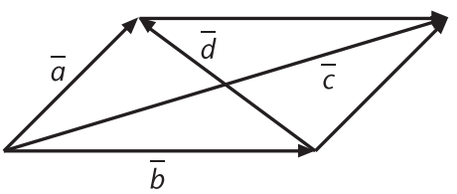


ESIMERKKI 2

Suunnikkaan sivuvektorit ovat $\overline{a}$ ja $\overline{b}$.

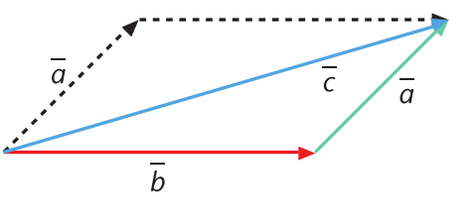
a) Muodosta suunnikkaan lävistäjävektorit $\overline{c}$ ja $\overline{d}$ sivuvektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

b) Määritä lävistäjien summavektori $\overline{c}+\overline{d}$.



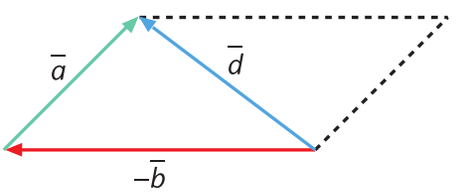
RATKAISU

a) Lävistäjävektori $\overline{c}$ saadaan sivuvektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ summana.



$$\overline{c}=\overline{b}+\overline{a}=\overline{a}+\overline{b}$$

Lävistäjä vektori $\overline{d}$ saadaan, kun $\overline{b}$:n vastavektoriin lisätään $\overline{a}$.



$$\overline{d}=-\overline{b}+\overline{a}=\overline{a}-\overline{b}$$

b) Lasketaan yhteen vektorit $\overline{c}$ ja $\overline{d}$.

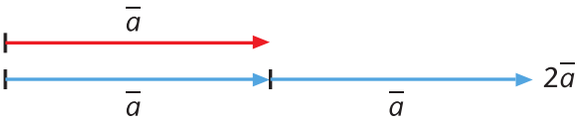
$$\begin{aligned}\overline{c}+\overline{d}&=(\overline{a}+\overline{b})+(\overline{a}-\overline{b})\\&=\overline{a}+\overline{b}+\overline{a}-\overline{b}\\&=2\overline{a}\end{aligned}$$

VASTAUS

a) $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}$ b) $\overline{c}+\overline{d}=2\overline{a}$

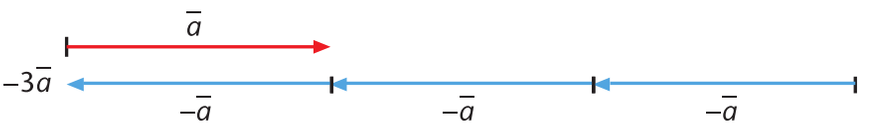
Luvulla kertominen

Tarkastellaan vektoreita $\overline{a}$ ja $2\overline{a}$.



Vektori $2\overline{a}$ on saatu liittämällä vektorin $\overline{a}$ perään toinen samanlainen vektori, eli vektorisummana $\overline{a}+\overline{a}=2\overline{a}$. Vektorin $\overline{a}$ pituus on siis pidentynyt kaksinkertaiseksi, mutta suunta on pysynyt samana.

Tarkastellaan vektoria $-3\,\overline{a}$. Se on saatu liittämällä peräkkäin kolme kappaletta vektorin $\overline{a}$ vastavektoria $-\overline{a}$.



Vektorin $\overline{a}$ pituus on siis kasvanut kolminkertaiseksi, mutta suunta on vaihtunut vastakkaiseksi.

Luvulla $t \neq 0$ kertominen kasvattaa vektorin pituutta $|t|$-kertaiseksi. Positiivisella luvulla kertominen säilyttää vektorin suunnan samana. Negatiivisella luvulla kertominen muuttaa suunnan vastakkaiseksi.

- $t\,\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$, jos $t > 0$
- $t\,\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$, jos $t < 0$
- $t\,\overline{a} = \overline{0}$, jos $t = 0$

Koska saman- ja vastakkaissuuntaiset vektorit ovat yhdensuuntaisia keskenään, niin vektorin kertominen luvulla t säilyttää yhdensuuntaisuuden.

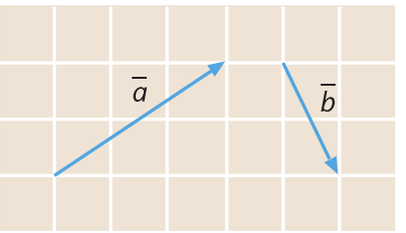
YHDENSUUNTAISUUSEHTO

$\overline{a} \parallel \overline{b}$, jos $\overline{a} = t\,\overline{b}$, jossa $t \neq 0$

ESIMERKKI 3

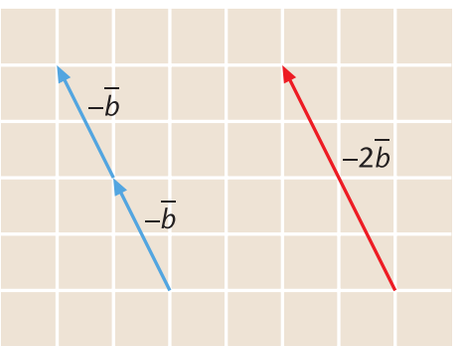
Olkoon vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kuten kuvassa. Piirrä vektoreiden avulla

a) $-2\overline{b}$ b) $2\overline{a}+3\overline{b}$.

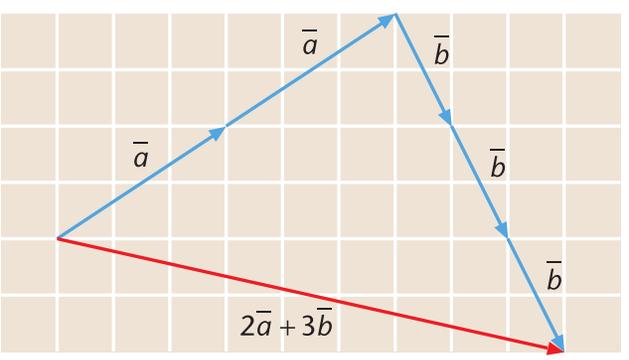


RATKAISU

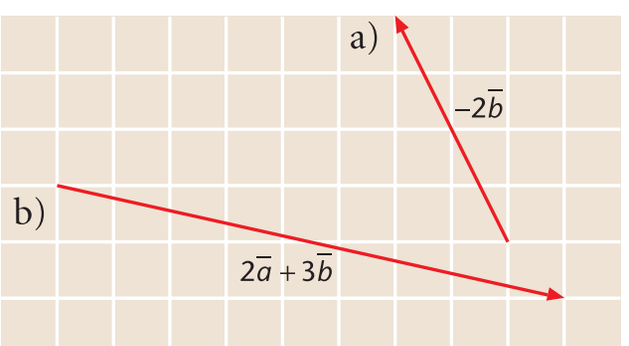
a) Vektori $-2\overline{b}$ on pituudeltaan kaksinkertainen ja vastakkaissuuntainen verrattuna vektoriin $\overline{b}$.



b) Piirretään vektorit $2\overline{a}$ ja $3\overline{b}$ peräkkäin.



VASTAUS



ESIMERKKI 4

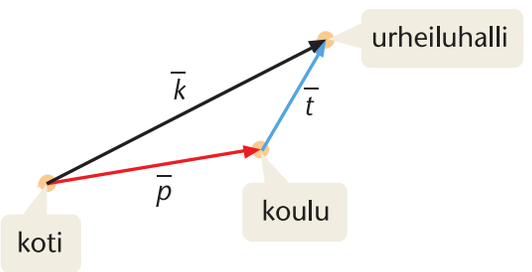
Petra on lähtenyt kotoa koululle aamulla. Koulupäivän jälkeen hän menee urheiluhallille treeneihin ja sen jälkeen vielä elokuviin. Siirtymää kotoa koululle kuvaa vektori $\overline{p}$ ja koululta treeneihin vektori $\overline{t}$. Siirtymä treeneistä suoraan elokuvateatteriin on vastakkaissuuntainen ja kolminkertainen verrattuna matkaan kotoa koululle. Ilmoita vektorien $\overline{p}$ ja $\overline{t}$ avulla se vektori, joka kuvaa siirtymää

a) kotoa suoraan treeneihin b) koululta elokuvateatteriin.

RATKAISU

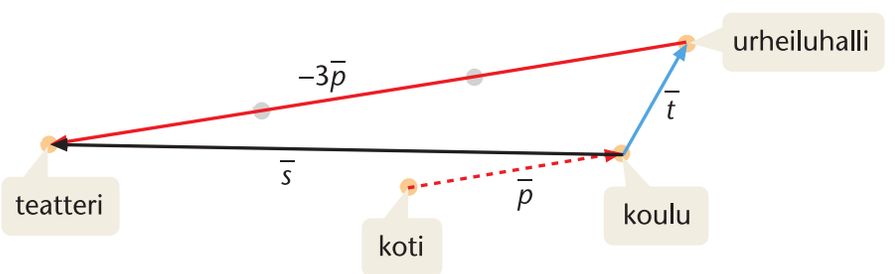
a) Piirretään tilannekuva ja merkitään siirtymävektoria kirjaimella $\overline{k}$.

Asetetaan vektorit peräkkäin siten, että lähtöpiste on kotona ja loppupiste urheiluhallilla.



Muodostuu ketju, jossa vektorin loppupisteeseen yhdistyy seuraavan alkupiste eli $\overline{k} = \overline{p} + \overline{t}$.

b) Siirtymä treeneistä elokuviin on vastakkaissuuntainen ja kolminkertainen vektoriin $\overline{p}$ verrattua eli $-3\overline{p}$. Merkitään siirtymää koululta teatteriin vektorilla $\overline{s}$.



Vektori $\overline{s}$ muodostuu vektorisummana
$\overline{s} = \overline{t} + (-3\overline{p}) = \overline{t} - 3\overline{p}$.

VASTAUS

a) $\overline{p} + \overline{t}$ b) $\overline{t} - 3\overline{p}$

ESIMERKKI 5

Olkoon vektorit $\overline{a} = 2\overline{e} + 6\overline{d}$ ja $\overline{b} = 2(\overline{e} - 3\overline{d})$. Määritä

a) erotusvektori $\overline{a} - \overline{b}$

b) $\overline{a^\circ}$, kun $|\overline{a}| = 4$

c) vektori, joka on vektorin $\overline{a}$ kanssa samansuuntainen ja jonka pituus on 80 pituusyksikköä.

RATKAISU

a) $\overline{a} - \overline{b} = 2\overline{e} + 6\overline{d} - 2(\overline{e} - 3\overline{d})$

$t(\overline{a} + \overline{b}) = t\overline{a} + t\overline{b}$

$= 2\overline{e} + 6\overline{d} - 2\overline{e} + 6\overline{d}$

$= 12\overline{d}$

b) Yksikkövektori $\overline{a^\circ} = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$.

$$\overline{a^\circ} = \frac{2\overline{e} + 6\overline{d}}{4} = \frac{2\overline{e}}{4} + \frac{6\overline{d}}{4} = \frac{1}{2}\overline{e} + \frac{3}{2}\overline{d}$$

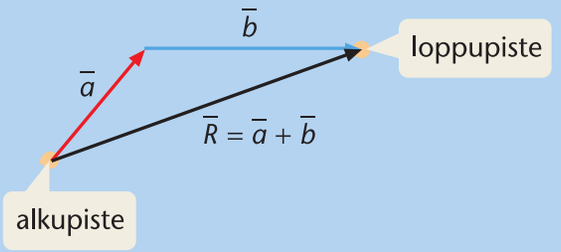
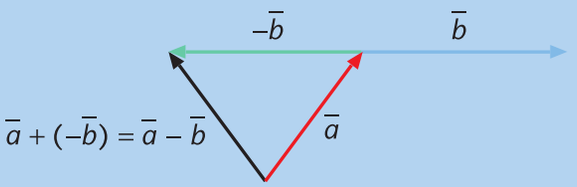
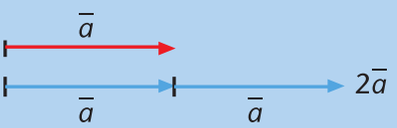
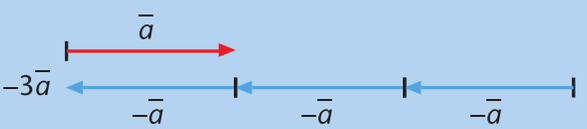
c) Yhden pituusyksikön mittainen vektori, joka on samansuuntainen vektorin $\overline{a}$ kanssa, on yksikkövektori $\overline{a^\circ} = \dfrac{1}{2}\overline{e} + \dfrac{3}{2}\overline{d}$.

Kysytyn vektorin pituuden tulee olla 80 pituusyksikköä, joten se on

$$80\overline{a^\circ} = 80\left(\frac{1}{2}\overline{e} + \frac{3}{2}\overline{d}\right) = 40\overline{e} + 120\overline{d}.$$

VASTAUS

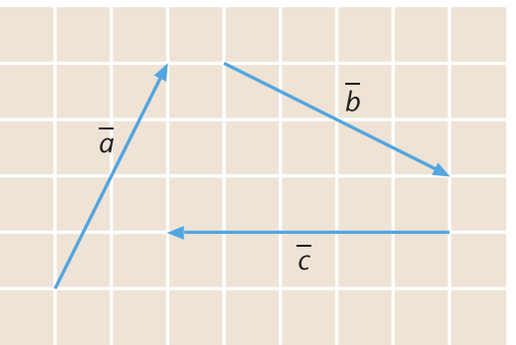
a) $\overline{a} - \overline{b} = 12\overline{d}$ b) $\overline{a^\circ} = \dfrac{1}{2}\overline{e} + \dfrac{3}{2}\overline{d}$ c) $40\overline{e} + 120\overline{d}$

Laskutoimitus	
Summa	Vektorit lasketaan yhteen liittämällä ne peräkkäin suuntansa ja pituutensa säilyttäen. Summavektori eli resultantti $\overline{R}$ saadaan yhdistämällä ensimmäisen vektorin alkupiste viimeisen kärkeen. 
Erotus	Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ erotus saadaan lisäämällä vektorin $\overline{b}$ vastavektori vektorin $\overline{a}$ eli $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$. 
Luvulla kertominen	Luvulla $t \neq 0$ kertominen kasvattaa vektorin pituutta $\lvert t \rvert$-kertaiseksi. Positiivisella luvulla kertominen säilyttää vektorin suunnan samana.  Negatiivisella luvulla kertominen muuttaa suunnan vastakkaiseksi. 

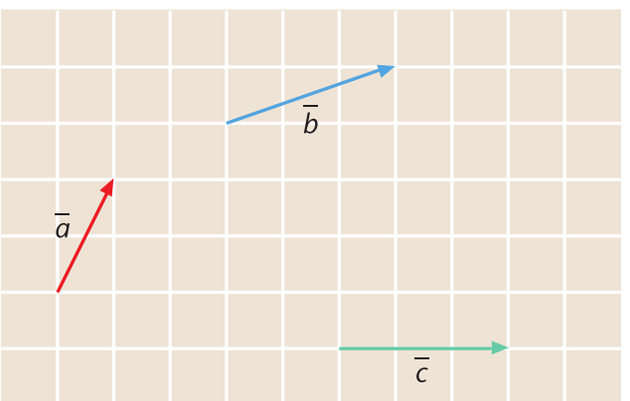
Tehtäviä

Summa ja erotus

185. Piirrä koordinaatistoon vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla summavektori
a) $\overline{a}+\overline{b}$
b) $\overline{a}+\overline{c}$
c) $\overline{b}+\overline{c}$
d) $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$.

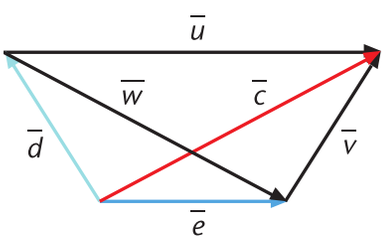


186. Piirrä annettujen vektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ vektorit
a) $\overline{k}=\overline{a}-\overline{b}$ b) $\overline{r}=\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$ c) $\overline{u}=-\overline{b}+\overline{c}$.



187. Vektorin $\overline{a}$ alkupiste on origossa ja loppupiste on (1, 6). Vektorin $\overline{b}$ alkupiste on (2, 4) ja loppupiste (5, –2). Siirrä vektori $\overline{b}$ ja piirrä summavektori $\overline{a}+\overline{b}$ ja erotusvektori $\overline{a}-\overline{b}$. Missä sijaitsevat näiden vektorien loppupisteet?

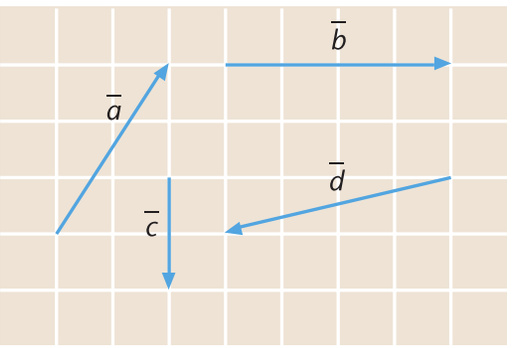
188. Esitä vektorit $\overline{u}, \overline{v}$ ja $\overline{w}$ vektoreiden $\overline{c}, \overline{d}$ ja $\overline{e}$ avulla.



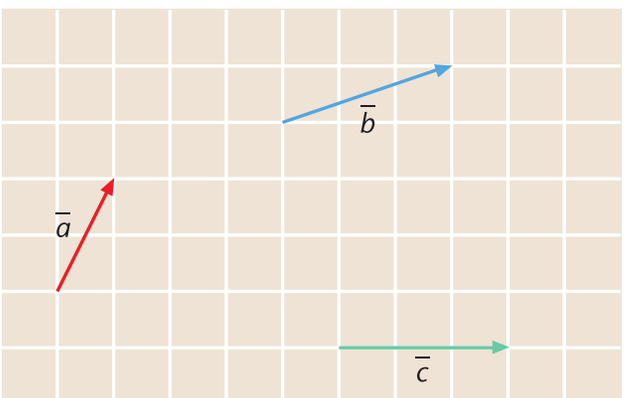
189. Vektori $\overline{u}=5\overline{a}+7\overline{b}$ ja vektori $\overline{v}=-3\overline{a}+4\overline{b}$. Laske
a) $\overline{u}+\overline{v}$ b) $\overline{u}-\overline{v}$.

Luvulla kertominen

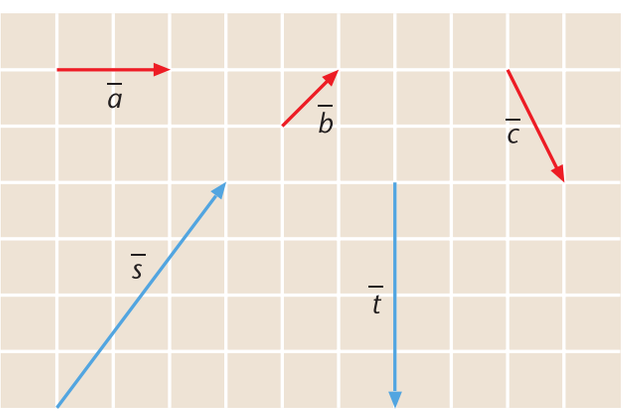
190. Piirrä koordinaatistoon vektori
a) $1{,}5\overline{b}$
b) $2\overline{a}$
c) $-\overline{d}$
d) $-3\overline{c}$.



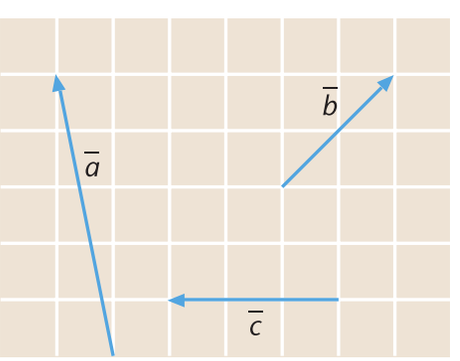
191. Piirrä annettujen vektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla vektorit
a) $\overline{k} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ b) $\overline{r} = 2\overline{a} + 3\overline{c}$ c) $\overline{u} = 2\overline{b} + \overline{c}$.



192. Lausu vektorit $\overline{s}$ ja $\overline{t}$ vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla.



193. Suunnistaja lähtee liikkeelle kotoaan, joka sijaitsee origossa. Hän juoksee matkan, jota esittää vektori $\overline{a} - 2\overline{c} - 2{,}5\overline{b}$. Mihin pisteeseen hän päätyy?



194. Kaksi partiolaisjoukkuetta järjestivät leirillä köydenvetokilpailun. Palokärjet vetivät köyttä voimalla, jota kuvaa vektori $3\overline{b}$. Sudet vetivät vastakkaiseen suuntaan 1,5-kertaisella voimalla. Palokärjet saivat lisävoimia runsaasta kannustuksesta, ja heidän yhteisvoimansa kasvoi vektorilla $2\overline{b}$.
   a) Muodosta joukkueiden kokonaisvoimien lausekkeet.
   b) Muodosta voimista vektorikuvio köydenvetotilanteen loppuvaiheessa. Piirrä yhteisvoimaa kuvaava vektori ja laske sen lauseke. Kumpi joukkue voitti?

195. Kolme koiraa kiskoo samaa paitaa. Ensimmäinen koira kiskoo paitaa voimalla, jota kuvaa vektori $\overline{AB}$. Toinen kiskoo voimalla, jota kuvaa vektori $\overline{AC}$, ja kolmannen koiran voiman vektori on $\overline{AD}$. Esitä graafisesti koordinaatistossa paitaan kohdistuva yhteisvoima edellisten summavektorina, kun $A = (0, 0)$, $B = (-4, 5)$, $C = (5, 2)$ ja $D = (4, -4)$.

196. Vektorin $4\overline{c} + 5\overline{d}$ pituus on 20 pituusyksikköä. Määritä
   a) yksikkövektori
   b) vektorin suuntainen toinen vektori, jonka pituus on 40 pituusyksikköä.

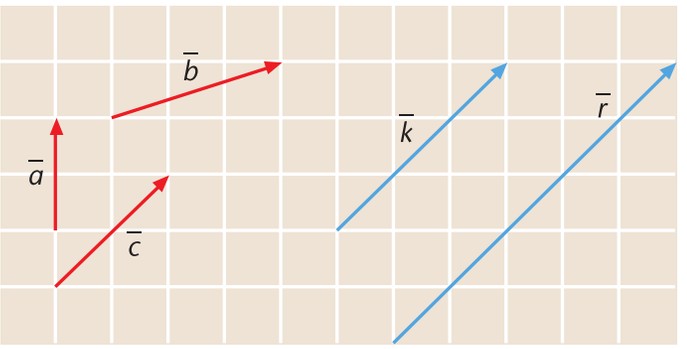
197. Suunnikkaan kärkipisteet ovat A, B, C ja D. Merkitään $\overline{AB} = \overline{a}$ ja $\overline{AD} = \overline{b}$. Suunnikkaan lävistäjät leikkaavat toisensa pisteessä E. Lausu vektorit $\overline{AE}$ ja $\overline{BE}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla, kun tiedetään, että suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

198. Suunnikkaan $OABC$ lävistäjien leikkauspiste on D. Määritä summa $\overline{OD} + \overline{AD}$ vektorien $\overline{a} = \overline{OA}$ ja $\overline{c} = \overline{OC}$ avulla.
[K1988, 3b]

199. Kolmion ABC kaksi sivuvektoria ovat $\overline{AB} = \overline{a}$ ja $\overline{AC} = \overline{b}$. Piste P jakaa sivun AB siten, että $|AP| = \frac{3}{5}|AB|$. Määritä vektori $\overline{PC}$ vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.

Sekalaisia tehtäviä

200. Lausu vektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla vektorit $\overline{k}$ ja $\overline{r}$.



201. Koordinaatiston pisteiden $A = (0, 0)$, $B = (4, 2)$ ja $C = (2, -2)$ mukaan määritellään vektorit $\overrightarrow{AB} = \overline{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overline{c}$ ja $\overrightarrow{BC} = \overline{b}$. Piirrä vektorit

a) $\frac{1}{2}\overline{a} - 2\overline{c}$ b) $\overline{a} - 2\overline{b} + \overline{c}$ c) $-\overline{a} + 2\overline{b} + 2\overline{c}$.

202. Olkoon $\overline{c} = 3\overline{d} - 9\overline{e} + 12\overline{f}$ ja $|\overline{c}| = 3$. Määritä

a) $\overline{c^\circ}$

b) vektori $\overline{k}$ siten, että $\overline{k} \uparrow\downarrow \overline{c}$ ja $|\overline{k}| = 18$.

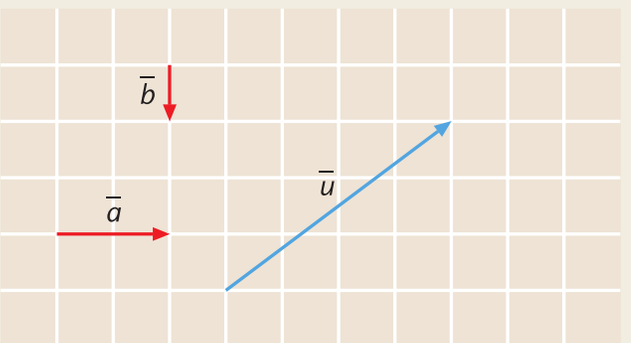
203. Salla ja Laura lähtevät ostoksille tavarataloon. He menevät samasta sisäänkäynnistä. Salla haluaa mennä kosmetiikkaosastolle ja Laura urheiluosastolle, minkä jälkeen he tapaavat kahvilassa puolen tunnin kuluttua. Siirtymää pääovelta kosmetiikkaosastolle kuvaa vektori $3\overline{p}$. Siirtymä pääovelta urheiluosastolle on kolmasosa tästä. Määritä siirtymä urheiluosastolta kahvilaan ja kosmetiikkaosastolta kahvilaan, kun suoraa reittiä pääovelta kahvilaan kuvaa vektori

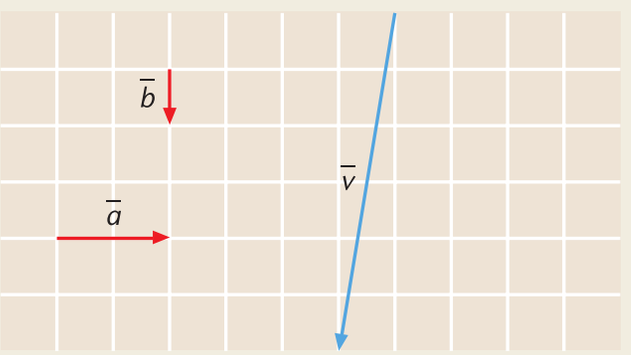
a) $3\overline{p} + \overline{s}$ b) $2\overline{p} + \overline{c} - \overline{b}$.

204. Kolmion ABC kärjestä A piirretään jana sivulle BC pisteeseen E. Piste E jakaa mainitun sivun kahteen yhtä suureen osaan. Janalla AE sijaitsee piste O, joka jakaa janan AE kahteen osaan suhteessa 2:1. Olkoot $\overrightarrow{AB} = \overline{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \overline{b}$. Lausu vektorit $\overrightarrow{AE}$ ja $\overrightarrow{AO}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla. Piirrä kuvio.

5.3 Komponentteihin jako

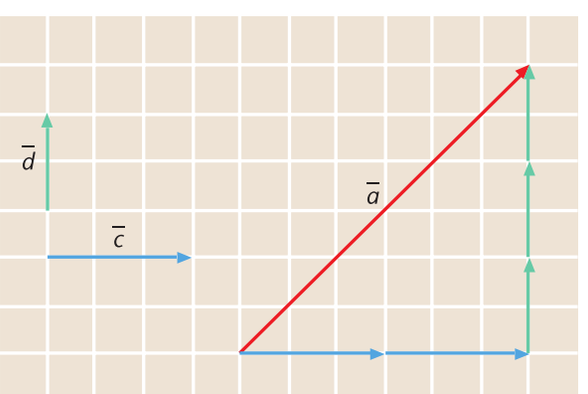
POHDINTA 1 Lausu vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla.





Tarkastellaan vektoria $\overline{a}$. Vektori voidaan lausua vektoreiden $\overline{c}$ ja $\overline{d}$ avulla seuraavasti:

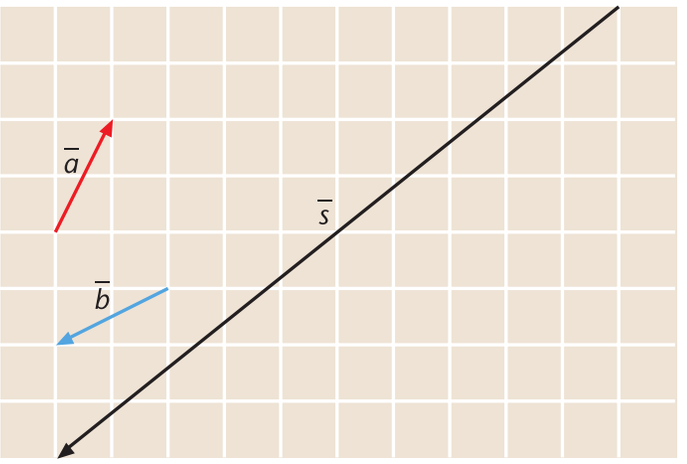
$$\overline{a} = 2\overline{c} + 3\overline{d}\,.$$



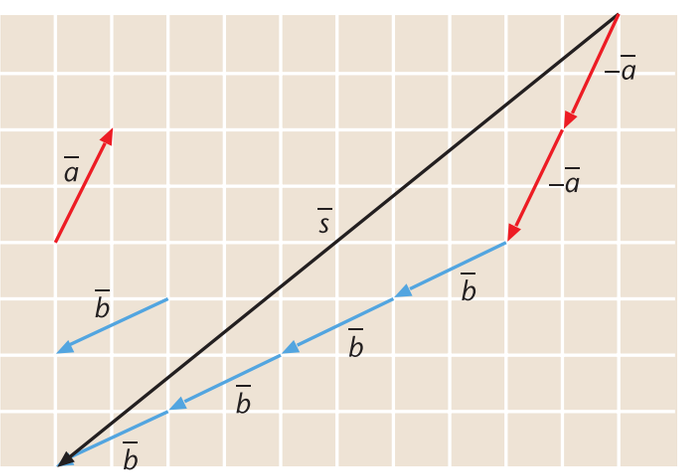
Yhteenlaskettavia $2\overline{c}$ ja $3\overline{d}$ sanotaan vektorin $\overline{a}$ *komponenteiksi.*

Tason vektorit voidaan aina lausua kahden erisuuntaisen vektorin avulla. Kolmiulotteisten avaruusvektorien komponenttiesitykseen tarvitaan kolme erisuuntaista vektoria, jotka kaikki eivät saa olla samassa tasossa.

ESIMERKKI 1 Jaa vektori $\overline{s}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.



RATKAISU Lausutaan vektori $\overline{s}$ vektorien summana käyttäen hyväksi $\overline{a}$:n vastavektoria $-\overline{a}$ ja vektoria $\overline{b}$.



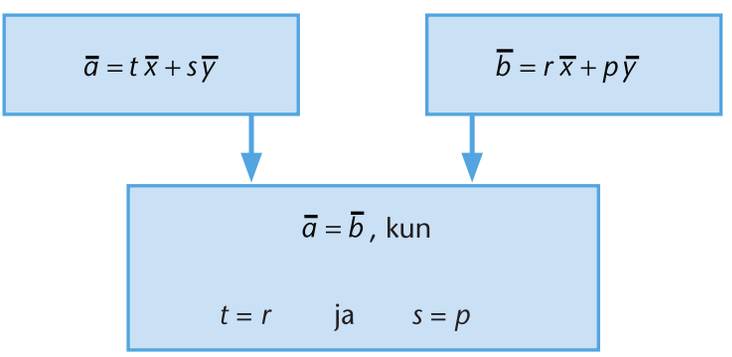
Vektori $\overline{s}$ on komponentteihin jaetussa muodossa $\overline{s} = -2\overline{a} + 4\overline{b}$.

VASTAUS $\overline{s} = -2\overline{a} + 4\overline{b}$

Komponentit ovat $-2\overline{a}$ ja $4\overline{b}$.

Komponentteihin jakoa voidaan käyttää hyväksi, kun tarkastellaan vektorien yhtäsuuruutta tai yhdensuuntaisuutta.

Kaksi vektoria $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhtä suuret, kun niiden komponentit ovat samat.



ESIMERKKI 2 Millä vakioiden t ja s arvoilla vektorit $2t(\overline{a}+3\overline{b})-s(3\overline{a}+5\overline{b})$ ja $13\overline{a}+27\overline{b}$ ovat identtiset eli yhtä suuret?

RATKAISU Vektorit ovat yhtä suuret, kun

$$2t(\overline{a}+3\overline{b})-s(3\overline{a}+5\overline{b}) = 13\overline{a}+27\overline{b}.$$

Avataan sulut ja yhdistetään samanmuotoiset termit.

$$2t\,\overline{a}+6t\,\overline{b}-3s\overline{a}-5s\overline{b}=13\overline{a}+27\overline{b}$$
$$(2t-3s)\overline{a}+(6t-5s)\overline{b}=13\overline{a}+27\overline{b}$$

Jotta vektorit olisivat yhtä suuret, on komponenttien oltava samat.
1) Vektorin $\overline{a}$ kertoimien pitää olla samat eli $2t-3s=13$.
2) Vektorin $\overline{b}$ kertoimien pitää olla samat eli $6t-5s=27$.

Ehdoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2t-3s=13 \;\big|\cdot(-3) \\ 6t-5s=27 \end{cases}$$

Ratkaistaan eliminointimenetelmällä

$$\begin{cases} -6t+9s=-39 \\ \;\;6t-5s=27 \end{cases}$$
$$4s=-12 \;\big|:4$$
$$s=-3$$

Sijoitetaan $s=-3$ jompaankumpaan yhtälöön ja ratkaistaan t.
Sijoitetaan yhtälöön $2t-3s=13$.

$$2t-3\cdot(-3)=13$$
$$2t+9=13$$
$$2t=4 \;\big|:2$$
$$t=2$$

VASTAUS $s=-3$ ja $t=2$

ESIMERKKI 3 Jaa vektori $\overline{r} = 6\overline{a} - 2\overline{b}$ vektorien $\overline{a} + \overline{b}$ ja $\overline{a} - \overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.

RATKAISU Lausutaan vektori $\overline{r}$ komponenttien $\overline{a} + \overline{b}$ ja $\overline{a} - \overline{b}$ summan avulla.

$$\overline{r} = s(\overline{a} + \overline{b}) + t(\overline{a} - \overline{b})$$
$$6\overline{a} - 2\overline{b} = s\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{a} - t\overline{b}$$
$$6\overline{a} - 2\overline{b} = (s + t)\overline{a} + (s - t)\overline{b}$$

Komponenttien on oltava samat yhtälön molemmilla puolilla, joten saadaan kaksi yhtälöä.

$$\begin{cases} s + t = 6 \\ s - t = -2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari eliminoimalla t.

$$\begin{cases} s + t = 6 \\ s - t = -2 \end{cases}$$
$$2s = 4 \quad | : 2$$
$$s = 2$$

Sijoitetaan $s = 2$ yhtälöön $s + t = 6$.

$$2 + t = 6$$
$$t = 4$$

Komponentit ovat siis $2(\overline{a} + \overline{b})$ ja $4(\overline{a} - \overline{b})$.

VASTAUS $\overline{r} = 2(\overline{a} + \overline{b}) + 4(\overline{a} - \overline{b})$

ESIMERKKI 4

Ovatko vektorit $\overline{c}$ ja $\overline{d}$ yhdensuuntaisia, kun

a) $\overline{c} = 4\overline{a} + 5\overline{b}$ ja $\overline{d} = 8\overline{a} + 15\overline{b}$

b) $\overline{c} = 3\overline{a} + 4\overline{b}$ ja $\overline{d} = -9\overline{a} - 12\overline{b}$?

RATKAISU

a) Jos vektorit $\overline{c}$ ja $\overline{d}$ ovat yhdensuuntaisia, vektorista $\overline{d}$ saadaan vektori $\overline{c}$ kertomalla se jollakin nollasta eroavalla luvulla t.

$$\overline{c} = t\,\overline{d}$$

$$4\overline{a} + 5\overline{b} = t\left(8\overline{a} + 15\overline{b}\right)$$

$$4\overline{a} + 5\overline{b} = 8t\,\overline{a} + 15t\,\overline{b}$$

Jos $\overline{c} \parallel \overline{d}$, niin $\overline{c} = t\,\overline{d}$, $t \neq 0$.

Vektorien komponenttien täytyy olla samat, joten saadaan ehdot

$$\begin{cases} 4 = 8t \\ 5 = 15t \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä vakio t.

$$8t = 4 \quad |:8 \qquad\qquad 15t = 5 \quad |:15$$

$$t = \frac{1}{2} \qquad\qquad t = 3$$

Koska $\frac{1}{2} \neq 3$, niin vektorit eivät ole yhdensuuntaiset.

b) Tutkitaan, onko

$$\overline{c} = t\,\overline{d}, \quad t \neq 0$$

$$-9\overline{a} - 12\overline{b} = t\left(3\overline{a} + 4\overline{b}\right)$$

$$-9\overline{a} - 12\overline{b} = 3t\overline{a} + 4t\overline{b}$$

Vektorien komponenttien täytyy olla samat, joten saadaan ehdot

$$\begin{cases} -9 = 3t \\ -12 = 4t \end{cases}$$

Ratkaistaan molemmista yhtälöistä vakio t.

$$3t = -9 \quad |:3 \qquad\qquad 4t = -12 \quad |:4$$

$$t = -3 \qquad\qquad t = -3$$

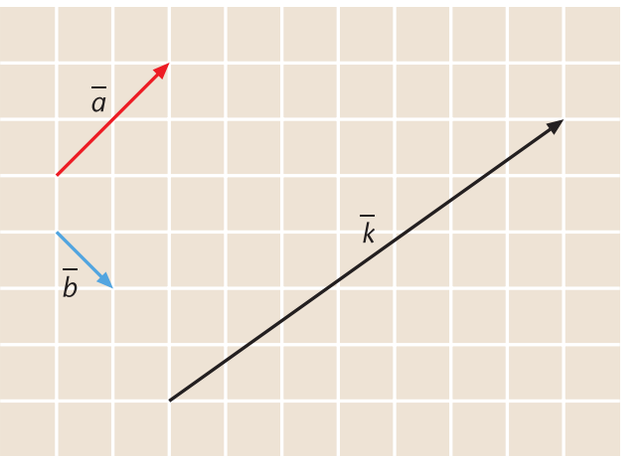
Koska molemmista yhtälöistä saatiin sama vakion arvo $t = -3$, vektorit ovat yhdensuuntaiset.

VASTAUS

a) Eivät ole yhdensuuntaisia. b) Ovat yhdensuuntaiset.

Tehtäviä

205. Jaa vektori $\vec{k}$ vektorien $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ suuntaisiin komponentteihin.



206. Millä vakion t arvolla vektorit $(2t+1)\vec{a}$ ja $3\vec{a}$ ovat samat?

207. Määritä vakiot r ja s siten, että vektorit $\vec{a} = -s\vec{i} + 6\vec{j}$ ja $\vec{b} = 9\vec{i} - 12r\vec{j}$ ovat samat.

208. Millä reaalilukujen t ja u arvoilla vektorit $2t(\vec{a} + 4\vec{b}) + 4u\vec{a} - u\vec{b}$ ja $-6\vec{a} + 10\vec{b}$ ovat identtiset?

209. Jaa vektori $2\vec{i} + 3\vec{j}$ vektoreiden $\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{i} - \vec{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

210. Jaa vektori $-\vec{x} + 8\vec{y}$ vektoreiden $3\vec{x} + \vec{y}$ ja $\vec{x} + 2\vec{y}$ suuntaisiin komponentteihin.

211. Tutki, ovatko vektorit $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ yhdensuuntaiset, kun $\vec{a} = -6\vec{c} + 9\vec{d}$ ja $\vec{b} = -4\vec{c} + 6\vec{d}$.

212. Vektori $\vec{a} = -7\vec{i} + 15\vec{j}$ ja $\vec{b} = \frac{35}{3}\vec{i} - 25\vec{j}$. Tutki, onko $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

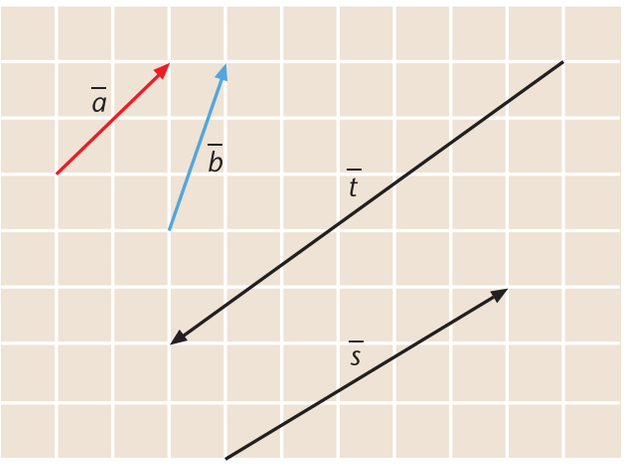
213. Vektoreille $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on voimassa yhtälöt $2\vec{x} + 3\vec{y} = -4\vec{a} + \vec{b}$ ja $-\vec{x} + 6\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Ovatko vektorit $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vastakkaissuuntaiset?

214. Määritä vakiot x ja y siten, että $-5x\vec{i} + 3\vec{i} + 7\vec{j} = -12\vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{j}$.

215. Pyry ja Niko vääntävät kättä. Pyry vääntää voimalla $4\overline{y}+10\overline{e}-3\overline{s}$ ja Niko vastakkaiseen suuntaan voimalla $-2t\overline{y}-5t\overline{e}+3\overline{s}$. Pojat toteavat, että kädenvääntö päättyy tasapeliin, koska he vääntävät yhtä suurilla voimilla. Tällöin voimien summa on nollavektori. Määritä vakio t.

Sekalaisia tehtäviä

216. Jaa vektorit $\overline{s}$ ja $\overline{t}$ vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.



217. Miten on a valittava, jotta vektorit $\overline{u}=(2+3a)\overline{i}-4\overline{j}$ ja $\overline{v}=5\overline{i}+(a-5)\overline{j}$ olisivat 1) samansuuntaisia 2) samoja? [S1991, 4b]

218. Jaa vektori $\overline{a}-5\overline{b}$ vektoreiden $\overline{a}+\overline{b}$ ja $\overline{a}-\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.

219. Tutki, ovatko vektorit $\overline{a}=6\overline{x}-3\overline{y}$ ja $\overline{b}=\overline{x}-2\overline{y}$ yhdensuuntaiset.

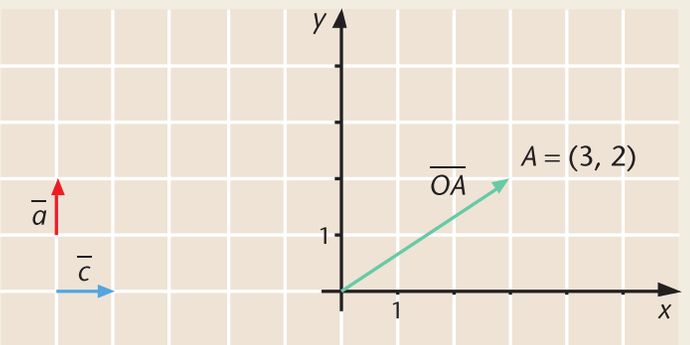
220. Voima, jonka suuruus on 75,0 N, jaetaan kahteen toisiaan vastaan kohtisuorassa olevaan komponenttiin. Laske toisen komponentin suuruus, jos toinen komponentti on 65,3 N.

5.4 Vektorit *xy*-koordinaatistossa

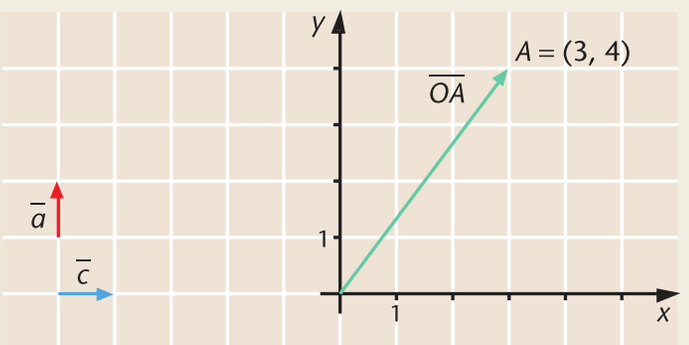
POHDINTA 1

Koordinaatistoon on piirretty vektori pisteestä $O = (0, 0)$ pisteeseen A.
Ilmoita vektori $\overline{OA}$ annettujen vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ avulla.

a)



b)



POHDINTA 2

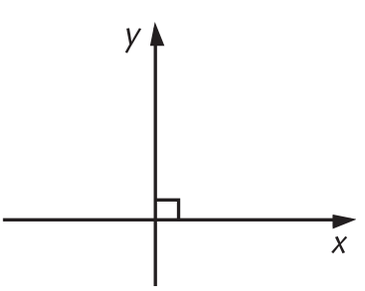
Päättele edellisen pohdintatehtävän perusteella, miten ilmoittaisit vektorin $\overline{OA}$ vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{c}$ avulla, kun piste O sijaitsee origossa ja pisteen A koordinaatit ovat

a) $(5, 7)$

b) $(-4, 2)$

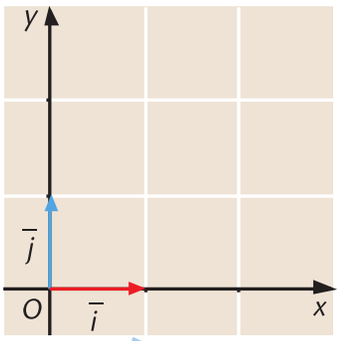
c) (x, y).

Kun vektoreita siirrytään tarkastelemaan suorakulmaisessa koordinaatistossa, voidaan hyödyntää koordinaatiston ominaisuuksia. Yksi tällaisista ominaisuuksista on koordinaattiakselien kohtisuoruus.



Paikkavektori ja vektorin pituus

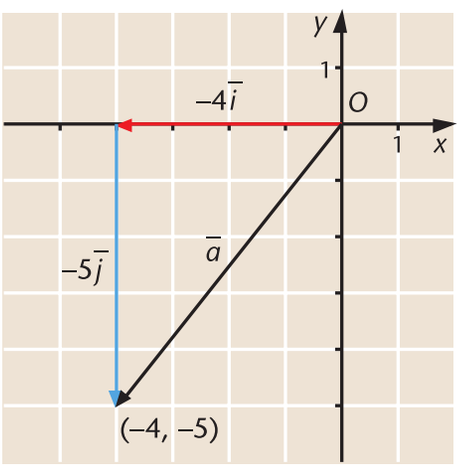
Sovitaan, että x-akselin suuntainen yksikkövektori on $\vec{i}$ ja y-akselin suuntainen yksikkövektori on $\vec{j}$. Vektoreita $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ kutsutaan xy-tason *kantavektoreiksi.*



Vektorit $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lisäksi ne ovat pituudeltaan yhden yksikön mittaisia.

$\vec{i} \perp \vec{j}$
$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

Vektoria, jonka alkupiste on origo ja loppupiste mielivaltainen tason piste, kutsutaan pisteen *paikkavektoriksi.* Esimerkiksi vektorilla $\vec{a} = -4\vec{i} - 5\vec{j}$ siirrytään origosta pisteeseen $(-4, -5)$. Vektori $\vec{a}$ on pisteen $(-4, -5)$ paikkavektori.

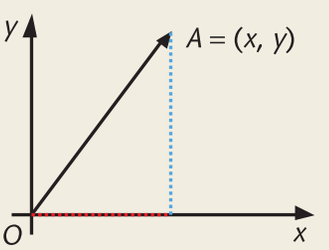


Vektorin $\vec{a} = -4\vec{i} - 5\vec{j}$ komponentit:
- vaakasuora $-4\vec{i}$
- pystysuora $-5\vec{j}$

PISTEEN (x, y) PAIKKAVEKTORI

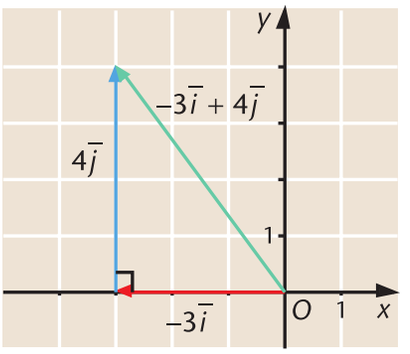
Origosta pisteeseen $A = (x, y)$ piirretty vektori on

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



Piste	Paikkavektori
$A = (4, 2)$	$\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$
$A = (-3, 8)$	$\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$
$A = (-7{,}5; -4{,}3)$	$\overrightarrow{OA} = -7{,}5\vec{i} - 4{,}3\vec{j}$

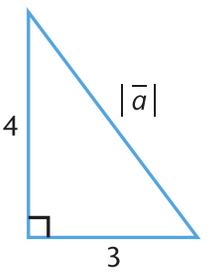
Tarkastellaan vektoria $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$. Koska vektorit $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, annetun vektorin pituus pystytään laskemaan muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta. Kateettien pituudet ovat vektorin $\bar{a}$ komponenttien pituudet:



$|-3\bar{i}| = 3$ ja $|4\bar{j}| = 4$.

Vektorin $\bar{a}$ pituus saadaan Pythagoraan lauseella

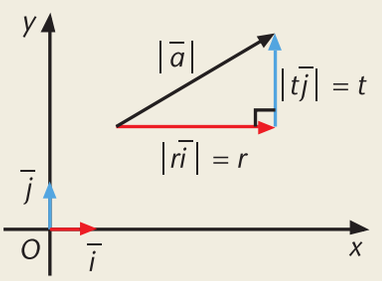
$$|\bar{a}|^2 = 3^2 + 4^2$$
$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



VEKTORIN PITUUS

Vektorin $\bar{a} = r\bar{i} + t\bar{j}$ pituus on

$$|\bar{a}| = \sqrt{r^2 + t^2}.$$



ESIMERKKI 1

Laske vektorin pituus, kun

a) $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ b) $\overline{CD} = -\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j}$ c) $\bar{c} = -5\bar{j}$.

RATKAISU

a) $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\overline{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\bar{c} = 0\bar{i} - 5\bar{j}$, $|\bar{c}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

VASTAUS

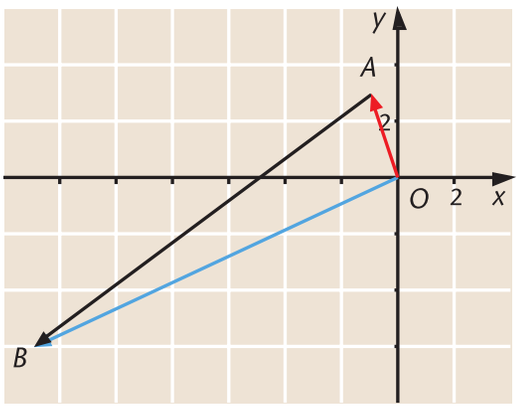
a) $|\bar{a}| = \sqrt{13}$ b) $|\overline{CD}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $|\bar{c}| = 5$

ESIMERKKI 2

Vektorin $\overline{AB}$ alkupiste on $A = (-1, 3)$. Määritä loppupisteen B koordinaatit, kun pisteestä A edetään 15 yksikköä vektorin $\overline{a} = -8\overline{i} - 6\overline{j}$ suuntaan.

RATKAISU

Pisteen B koordinaatit saadaan selville paikkavektorin $\overline{OB}$ avulla.



$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

Pisteen B paikkavektorin määrittämiseksi tarvitaan pisteen A paikkavektoria.

$$\overline{OA} = -\overline{i} + 3\overline{j}$$

Vektori $\overline{AB}$ saadaan vektorin $\overline{a}$ yksikkövektorin $\overline{a^\circ}$ avulla. Koska $\overline{a^\circ} = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, niin lasketaan ensin vektorin $\overline{a}$ pituus $|\overline{a}|$.

$|\overline{a}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$, joten $\overline{a^\circ} = \dfrac{-8\overline{i} - 6\overline{j}}{10}$.

Pisteen B paikkavektori on siis

$$\begin{aligned}
\overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} + 15\overline{a^\circ} \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} + \frac{15(-8\overline{i} - 6\overline{j})}{10} \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} + \frac{3}{2}(-8\overline{i} - 6\overline{j}) \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} - 12\overline{i} - 9\overline{j} \\
&= -13\overline{i} - 6\overline{j}
\end{aligned}$$

Paikkavektorista nähdään pisteen B koordinaatit $(-13, -6)$.

VASTAUS

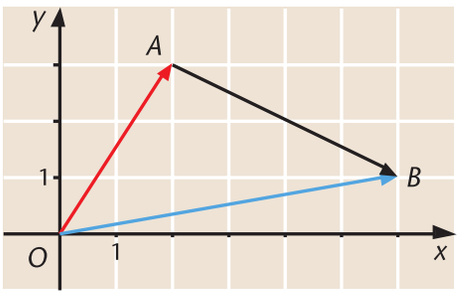
$B = (-13, -6)$

Kahden pisteen välinen vektori

Tarkastellaan pisteiden $A = (2, 3)$ ja $B = (6, 1)$ välistä vektoria $\overline{AB}$.

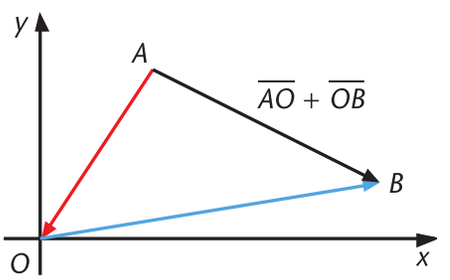
Pisteiden A ja B paikkavektorit ovat

$$\overline{OA} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$$
$$\overline{OB} = 6\bar{i} + \bar{j}$$



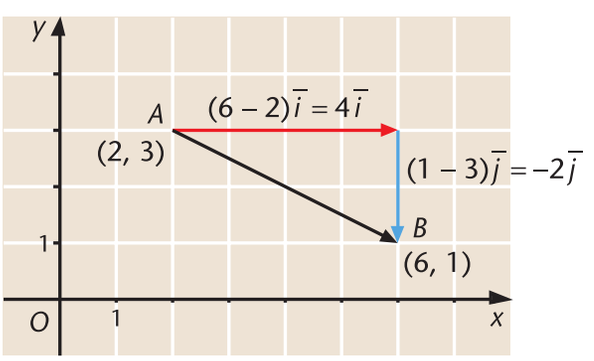
Muodostetaan $\overline{AB}$ vektorisummana

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} \\ &= -(2\bar{i} + 3\bar{j}) + (6\bar{i} + \bar{j}) \\ &= -2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{i} + \bar{j} \\ &= (6-2)\bar{i} + (1-3)\bar{j} \\ &= 4\bar{i} - 2\bar{j}\end{aligned}$$



Pisteiden välisen vaakasuoran eli x-akselin suuntaisen muutoksen suuruus on $6 - 2 = 4$.

Pystysuoran eli y-akselin suuntaisen muutoksen suuruus on $1 - 3 = -2$.

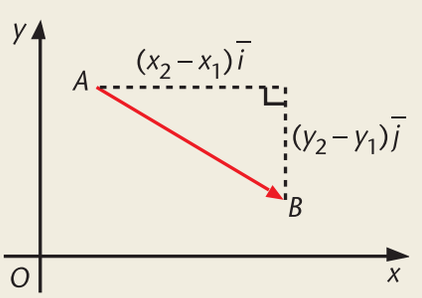


Pisteiden välisen vektorin $\bar{i}$:n ja $\bar{j}$:n kertoimet saadaan siis suoraan koordinaattien erotuksena. Loppupisteen koordinaateista vähennetään alkupisteen koordinaatit.

KAHDEN PISTEEN VÄLINEN VEKTORI

Jos $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$, niin vektori

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j}.$$



ESIMERKKI 3

Pisteet $A = (-2, 1)$, $B = (2, -1)$ ja $C = (1, 2)$ muodostavat kolmion.

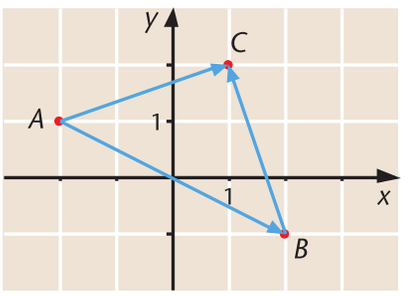
a) Muodosta kolmion sivuvektorit $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{AC}$.

b) Laske sivuvektorien pituudet.

c) Muodosta vektori $\bar{h}$, joka kuvaa kolmion korkeutta. Vektorin $\bar{h}$ alkupiste on kolmion huippu.

RATKAISU

a) Merkitään annetut pisteet koordinaatistoon. Sivuvektorit ovat



$$\overline{AB} = \big(2-(-2)\big)\bar{i} + (-1-1)\bar{j} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$$
$$\overline{BC} = (1-2)\bar{i} + \big(2-(-1)\big)\bar{j} = -\bar{i} + 3\bar{j}$$
$$\overline{AC} = \big(1-(-2)\big)\bar{i} + (2-1)\bar{j} = 3\bar{i} + \bar{j}$$

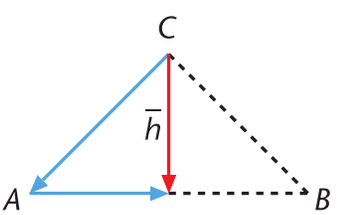
b) Sivuvektoreiden pituudet ovat

$$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$
$$|\overline{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

c) Koska kolmion kaksi sivua ovat samanpituisia, kolmio on tasakylkinen. Tällöin kolmion korkeusjana puolittaa kannan AB.

Lasketaan $\bar{h}$ vektorisummana.

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB} \\ &= -\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} \\ &= -\big(3\bar{i} + \bar{j}\big) + \frac{1}{2}\big(4\bar{i} - 2\bar{j}\big) \\ &= -3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{i} - \bar{j} \\ &= -\bar{i} - 2\bar{j}\end{aligned}$$



VASTAUS

a) Sivuvektorit ovat $\overline{AB} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overline{BC} = -\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\overline{AC} = 3\bar{i} + \bar{j}$.

b) Pituudet ovat $|\overline{AB}| = \sqrt{20}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{10}$ ja $|\overline{AC}| = \sqrt{10}$.

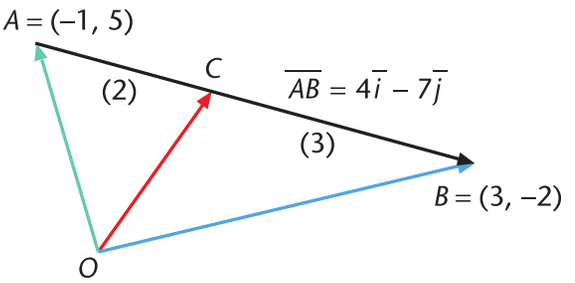
c) $\bar{h} = -\bar{i} - 2\bar{j}$

ESIMERKKI 4

Janan AB päätepisteet ovat $A = (-1, 5)$ ja $B = (3, -2)$. Piste C jakaa janan suhteessa 2:3. Määritä pisteen C koordinaatit.

RATKAISU

Hahmotellaan pisteiden A ja B paikkavektorit ja merkitään kuvioon janan jakopiste C.



Janaa AB kuvaa vektori

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (3-(-1))\bar{i} + (-2-5)\bar{j} \\ &= 4\bar{i} - 7\bar{j}\end{aligned}$$

Muodostetaan vektori $\overline{OC}$.

Jos jana AB jaetaan viiteen yhtä suureen osaan, janan AC pituus on $\frac{2}{5}$ ja janan BC pituus on $\frac{3}{5}$ janan AB pituudesta.

$$\overline{AC} = \frac{2}{5}\overline{AB} \qquad \text{ja} \qquad \overline{BC} = \frac{3}{5}\overline{BA}$$

Tapa 1

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AC} \\ &= \overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{AB} \\ &= -\bar{i} + 5\bar{j} + \frac{2}{5}(4\bar{i} - 7\bar{j}) \\ &= -\bar{i} + 5\bar{j} + \frac{8}{5}i - \frac{14}{5}\bar{j} \\ &= \frac{3}{5}i + \frac{11}{5}\bar{j}\end{aligned}$$

Tapa 2

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OB} + \overline{BC} \\ &= \overline{OB} + \frac{3}{5}\overline{BA} \\ &= 3\bar{i} - 2\bar{j} + \frac{3}{5}(-\overline{AB}) \\ &= 3\bar{i} - 2\bar{j} + \frac{3}{5}(-4\bar{i} + 7\bar{j}) \\ &= 3i - 2\bar{j} - \frac{12}{5}\bar{i} + \frac{21}{5}\bar{j} \\ &= \frac{3}{5}\bar{i} + \frac{11}{5}\bar{j}\end{aligned}$$

Koska vektori $\overline{OC}$ on pisteen C paikkavektori, pisteen koordinaatit saadaan siis suoraan vektorin komponenttien kertoimista.

Piste $C = \left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

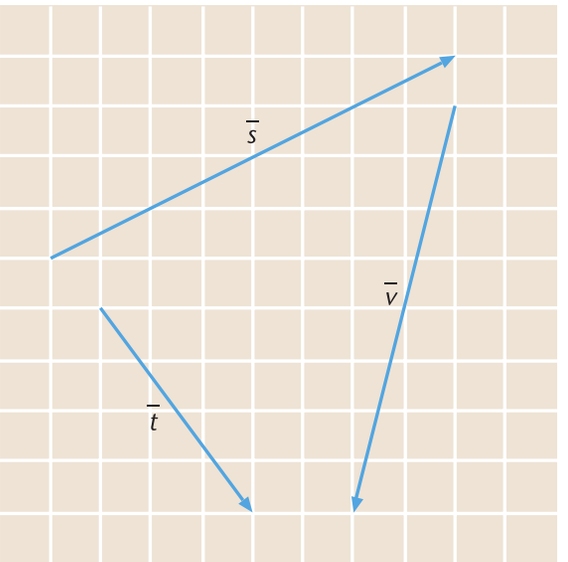
VASTAUS

$C = \left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$

Tehtäviä

Paikka-vektori ja vektorin pituus

221. Lausu vektorit $\overline{s}$, $\overline{t}$ ja $\overline{v}$ kantavektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ avulla.



222. Piirrä koordinaatistoon vektori
a) $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j}$
b) $\overline{b} = -3\overline{i} + 5\overline{j}$
c) $\overline{c} = 7\overline{i} - 5\overline{j}$.

223. Määritä pisteiden $A = (-6, -1)$, $B = \left(-\frac{2}{3}, 3\frac{1}{3}\right)$ ja $C = (-0{,}6;\ 4{,}5)$ paikkavektorit.

224. Vektorin $\overline{t} = -7\overline{i} + 5\overline{j}$ alkupiste on $(4, 10)$. Määritä loppupisteen koordinaatit paikkavektorien avulla.

225. Piirrä koordinaatistoon summavektori $\overline{a} + \overline{b}$, kun $\overline{a} = -\overline{i} + 4\overline{j}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} - 2\overline{j}$. Aseta vektorin $\overline{a}$ alkupisteeksi origo. Määritä kuvan avulla summavektorin loppupisteen koordinaatit. Piirrä lisäksi erotusvektori $\overline{a} - \overline{b}$ vastaavalla tavalla ja määritä kuvan avulla sen loppupisteen koordinaatit.

226. Vektori $\overline{AB} = 3\overline{i} - 6\overline{j}$ ja vektori $\overline{BC} = -5\overline{i} - 2\overline{j}$. Määritä pisteen C koordinaatit, kun vektorin $\overline{AB}$ alkupiste on $(2, 5)$.

227. Määritä vektorin pituus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun
a) $\overline{a} = 6\overline{i} + 9\overline{j}$ b) $\overline{b} = -4{,}8\overline{i} + 3{,}6\overline{j}$ c) $\overline{c} = -\frac{3}{2}\overline{i} - 2\overline{j}$.

228. Tason vektori $\overline{a} = -3\overline{i} + 4\overline{j}$. Määritä
a) yksikkövektori $\overline{a^\circ}$
b) vektorin $\overline{a}$ suuntainen vektori, jonka pituus on 15.

229. Laske vektorin $2\overline{a} - 3\overline{b}$ pituus, kun $\overline{a} = 4\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j}$. [S1994, 5b]

230. Pisteiden $O = (0, 0)$, $P = (6, 8)$ ja $Q = (9, 14)$ määräämät vektorit $\overrightarrow{OP}$ ja $\overrightarrow{OQ}$ ovat suunnikkaan sivuina. Määritä suunnikkaan lävistäjien pituudet. [K1990, 7]

231. Suunnistaja etenee vektorin $\overline{i}$ suuntaisesti 150 m pisteestä O pisteeseen A, josta hän jatkaa 270 m vektorin $3\overline{i} + 4\overline{j}$ suunnassa pisteeseen B. Miten kaukana hän on tällöin lähtöpisteestä? [K1992, 3b]

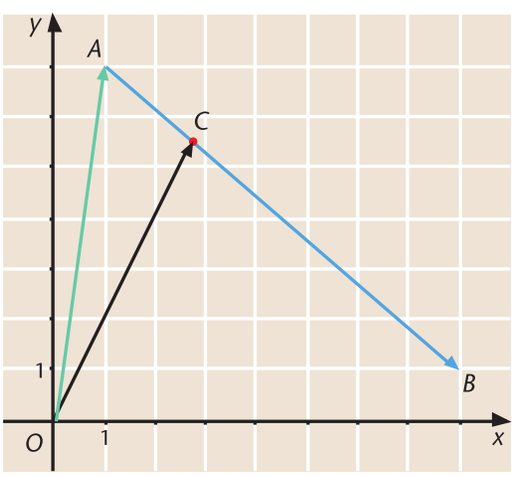
Kahden pisteen välinen vektori

232. Määritä pisteiden välinen vektori, kun vektorin
a) alkupisteenä on (1, 5) ja loppupisteenä on (8, 10)
b) alkupisteenä on (–1, –2) ja loppupisteenä on (3, 1)
c) alkupisteenä on (–2, 5) ja loppupisteenä on (5, –5).

233. Määritä vektorit $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ ja $\overline{OB}$, kun $O = (0, 0)$, $A = (5, 6)$ ja $B = (8, 4)$. Laske summa $\overline{OA} + \overline{AB}$.

234. Kolmion kärkinä ovat pisteet $A = (–1, 1)$, $B = (2, –1)$ ja $C = (3, 3)$. Esitä komponenttimuodossa vektorit $\overline{p} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{q} = \overrightarrow{BC}$ ja $\overline{r} = \overrightarrow{CA}$ sekä laske summat $\overline{p} + \overline{q} + \overline{r}$ ja $3\overline{p} - \overline{q} + 2\overline{r}$. [K1991, 3b]

235. Määritä kuvan avulla vektorit $\overline{OA}$ ja $\overline{AB}$. Määritä edellä mainittujen vektorien avulla piste C, kun tiedetään, että $|\overline{AC}| = \frac{1}{4}|\overline{AB}|$. Missä suhteessa piste C jakaa janan AB?



236. Piste Q jakaa janan PR suhteessa 1:1, eli Q sijaitsee janan PR puolivälissä. Määritä pisteen Q koordinaatit, kun $P = (0, 10)$ ja $R = (6, –2)$.

237. Tasossa on annettu pisteet $A = (–1, 3)$, $B = (3, 2)$ ja $P = (–2, –10)$. Esitä vektorit $\overrightarrow{PA}$ ja $\overrightarrow{PB}$ yksikkövektoreiden $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ avulla sekä päättele vektorien pituuksien neliöiden nojalla, kumpi pisteistä A ja B on lähempänä pistettä P. [K1986, 3b]

238. Hätäraketin lähettäjää paikannettaessa pisteessä $A = (0, 0)$ oleva havainnoitsija sanoi lähettäjän olleen suunnassa $\overline{i} + 2\overline{j}$ tai sen oikealla puolella, pisteessä $B = (6, -2)$ oleva havainnoitsija suunnassa $-\overline{i} + 3\overline{j}$ tai sen vasemmalla puolella ja pisteessä $C = (9, 0)$ oleva havainnoitsija suunnassa $-3\overline{i} + 2\overline{j}$ tai sen oikealla puolella. Piirrä kuva alueesta, josta hätäraketti on lähtenyt, ja määritä lähettäjän suurin mahdollinen etäisyys havaintopisteestä B. [K1997, 8b]

Sekalaisia tehtäviä

239. Määritä pisteen
a) $(5, 7)$ b) $(4, -3)$ c) $(-6, -2)$
paikkavektori. Laske paikkavektorin pituus.

240. Määritä vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$, kun $A = (-5, 4)$, $B = (0, 9)$ ja $C = (3, -1)$. Määritä edellisten avulla summavektori $\overline{AB} + \overline{BC}$ ja laske sen pituus.

241. Vektorin $\overline{AB}$ alkupiste on $A = (2, -3)$. Määritä loppupisteen B koordinaatit, kun pisteestä A edetään 25 yksikköä vektorin $\overline{c} = 8\overline{i} + 6\overline{j}$ suuntaan.

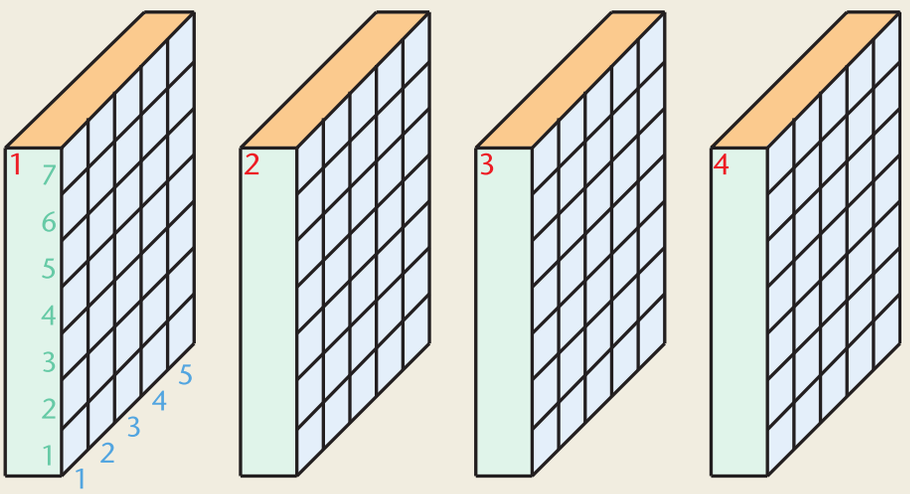
242. Pisteestä $A = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ lähtevät vektorit $\overline{a} = \overline{i} + 4\overline{j}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} + 5\overline{j}$ ovat suunnikkaan sivuina. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste olkoon B. Määrää pisteen B koordinaatit ja vektori $\overline{AB}$. [S1995, 5a] (Ohje: Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.)

243. Kolmion ABC kaksi sivuvektoria ovat $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$. Piste P jakaa sivun AB suhteessa 1:2 ja piste Q sivun BC suhteessa 3:2. Määritä $\overline{PQ}$ vektoreiden $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ avulla.

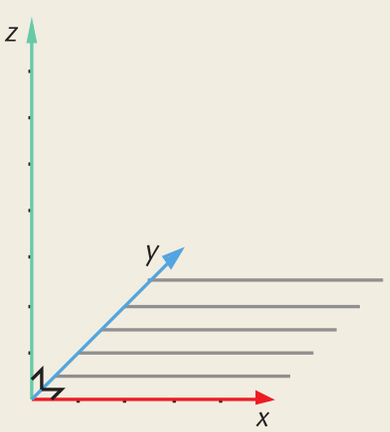
5.5 Vektorit *xyz*-koordinaatistossa

POHDINTA 1

Erään yrityksen arkisto koostuu 4 hyllyköstä, joissa jokaisessa on 7 hyllyä. Jokaisessa hyllyssä on 5 laatikkoa vierekkäin.



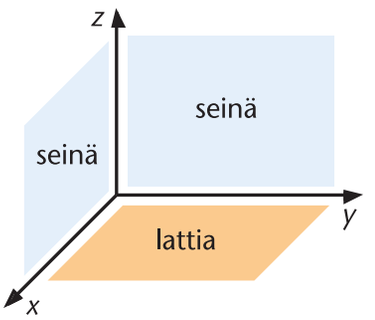
Arkistoa voidaan kuvata koordinaatistomallilla, jossa lattiaa kuvaa *xy*-taso.



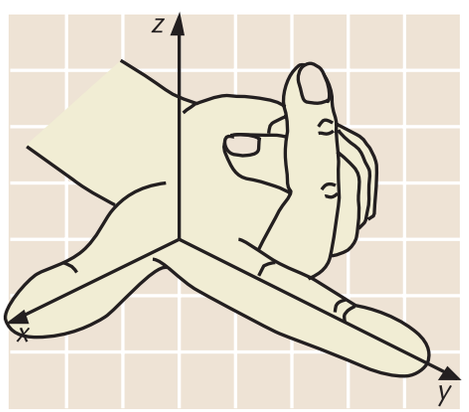
Jos hyllyköitä kuvaa koordinaatti *x*, laatikoita koordinaatti *y* ja hyllyjä koordinaatti *z*, niin missä sijaitsee asiakirja, joka on hyllykössä kolme, viidennessä laatikossa ja hyllyllä seitsemän?

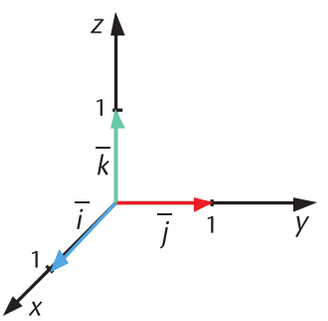
Kaksiulotteisella *xy*-koordinaatistolla voidaan kuvata esimerkiksi kappaleiden pituutta ja leveyttä. Tällöin pituutta kuvaa *x*-koordinaatti ja leveyttä *y*-koordinaatti. Kolmiulotteisessa koordinaatistossa eli *avaruuskoordinaatistossa* pituuden ja leveyden lisäksi voidaan kuvata esimerkiksi kappaleen korkeutta *z*-koordinaatilla. Koordinaatistoon merkitään siis pisteitä (x, y, z). Lisäksi koordinaatisto on suorakulmainen eli akselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Jos *xy*-taso ajatellaan lattiaksi, niin *z*-koordinaatti kuvaa korkeutta ja *xz*- ja *yz*-tasot kuvaavat seiniä.



Tason *xy* kantavektorit ovat $\vec{i}$ ja $\vec{j}$. Pystysuoran *z*-akselin suuntaista yksikkövektoria merkitään vektorilla $\vec{k}$. Avaruuden *xyz* kantavektorit ovat siis $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$. Tavallisimmin *xyz* -koordinaatisto piirretään oikean käden kolmisäännön mukaan. Peukalo osoittaa *x*-akselin, etusormi *y*-akselin ja keskisormi *z*-akselin positiivisen suunnan.





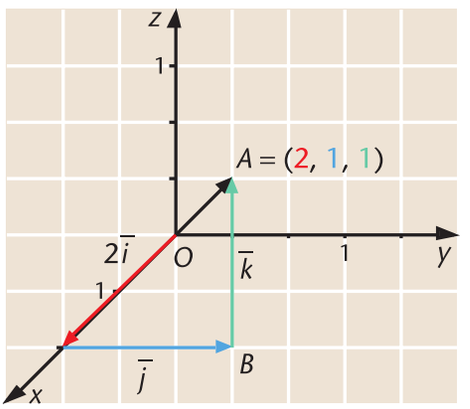
Useimmissa tehtävissä ratkaisu ei edellytä tarkan kolmiulotteisen koordinaatiston piirtämistä, vaan pisteet ja vektorit piirretään ilman koordinaatistoa. Tämä johtuu siitä, että tavallisimmat tason vektoreille tutut käsitteet ja laskusäännöt voidaan laajentaa koskemaan myös avaruuskoordinaatistoa. Näin esimerkiksi paikkavektori merkitsee samaa asiaa sekä tasossa että avaruudessa.

Paikkavektori ja vektorin pituus

Pisteen $A = (2, 1, 1)$ paikkavektori on origosta pisteeseen A piirretty vektori $\overline{OA}$. Merkitään piste A avaruuskoordinaatistoon. Siirrytään origosta 2 yksikköä x-akselia pitkin. Tästä pisteestä jatketaan 1 yksikkö y-akselin suuntaan. Lopuksi noustaan 1 yksikkö z-akselin suuntaan.

Paikkavektori $\overline{OA}$ voidaan lausua kantavektoreiden vektoreiden $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ summana:

$$\overline{OA} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}.$$



Avaruuskoordinaatiston kantavektoreiden $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$ avulla avaruusvektorit voidaan lausua komponenttimuodossa. Jokainen avaruuden vektori $\overline{a}$ voidaan esittää kantavektoreiden avulla muodossa

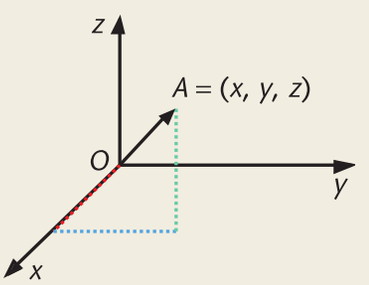
$$\overline{a} = r\overline{i} + t\overline{j} + u\overline{k},$$

jossa kertoimet r, t ja u ovat reaalilukuja.

PISTEEN (x, y, z) PAIKKAVEKTORI

Origosta pisteeseen $A = (x, y, z)$ piirretty vektori on

$$\overline{OA} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

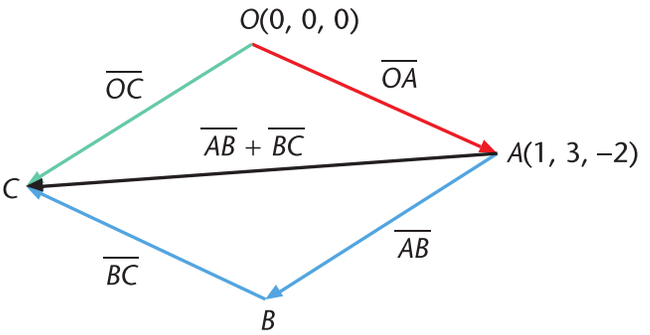


ESIMERKKI 1

Vektorin $\overline{AB} = -2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ alkupiste on $A(1, 3, -2)$. Määritä paikkavektorien avulla summavektorin $\overline{AB} + \overline{BC}$ loppupiste C, kun $\overline{BC} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$.

RATKAISU

Koska kysytään pisteen C koordinaatteja, piirretään mallikuva tilanteesta, jotta nähdään, miten paikkavektori $\overline{OC}$ muodostuu.



Määritetään summavektori $\overline{AB} + \overline{BC}$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} &= (-2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) + (4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}) \\ &= -2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} + 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k} \\ &= 2\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}\end{aligned}$$

Pisteen C paikkavektoriksi saadaan kuvan mukaan $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC}$. Tämän paikkavektorin määrittämiseen tarvitaan pisteen A paikkavektoria $\overline{OA}$.

$\overline{OA} = \bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} \\ &= (\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}) + (2\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}) \\ &= \bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k} + 2\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k} \\ &= 3\bar{i} - \bar{j}\end{aligned}$$

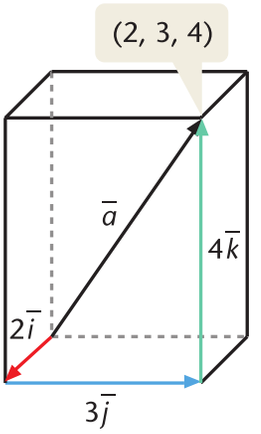
Koska $\overline{OC} = 3\bar{i} - \bar{j}$, piste $C = (3, -1, 0)$.

VASTAUS

$C = (3, -1, 0)$

Tarkastellaan suorakulmaista särmiötä, jonka sivuvektorit ovat $2\bar{i}$, $3\bar{j}$ ja $4\bar{k}$. Särmiön sivujen pituudet ovat siis

$$|2\bar{i}| = 2,\ |3\bar{j}| = 3 \text{ ja } |4\bar{k}| = 4.$$

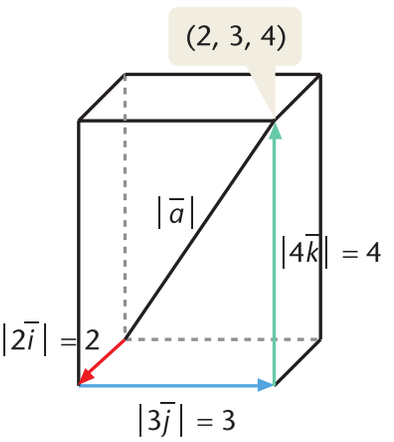


Lasketaan särmiön avaruuslävistäjän pituus. Jos avaruuslävistäjän toinen päätepiste on origossa, toinen päätepiste on (2, 3, 4). Avaruuslävistäjää kuvaa vektori

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjän pituus $|\bar{a}|$ on

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$



Vastaavalla tavalla voidaan määrittää vektorin $\bar{a} = r\bar{i} + t\bar{j} + u\bar{k}$ pituus

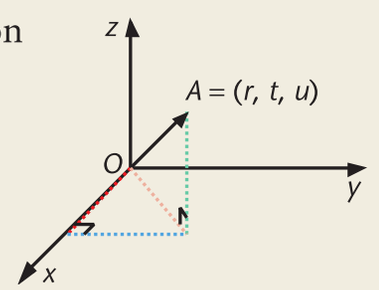
$$|\bar{a}| = \sqrt{r^2 + t^2 + u^2}.$$

VEKTORIN PITUUS

Vektorin $\bar{a} = r\bar{i} + t\bar{j} + u\bar{k}$ pituus on

$$|\bar{a}| = \sqrt{r^2 + t^2 + u^2},$$

jossa r, t ja u ovat reaalilukuja.



ESIMERKKI 2 Määritä pisteiden $A = (-1, 3, -4)$ ja $B = (0, -2, 1)$ paikkavektorit ja niiden pituudet kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

RATKAISU Pisteen (x, y, z) paikkavektori on $\overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Tällöin pisteen $A = (-1, 3, -4)$ paikkavektorion $\overline{OA} = -\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$.
Vastaavasti pisteen $B = (0, -2, 1)$ paikkavektori on $\overline{OB} = -2\bar{j} + \bar{k}$.

Vektorin $\bar{a} = r\bar{i} + t\bar{j} + u\bar{k}$ pituus lasketaan kaavalla $|\bar{a}| = \sqrt{r^2 + t^2 + u^2}$. Paikkavektoreiden pituudet ovat siis

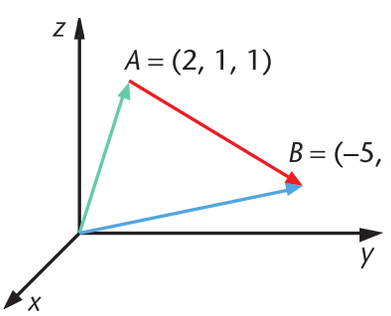
$$|\overline{OA}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{26} = 5{,}099... \approx 5{,}10$$

$$|\overline{OB}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2{,}236... \approx 2{,}24.$$

VASTAUS $\overline{OA} = -\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $|\overline{OA}| \approx 5{,}10$, $\overline{OB} = -2\bar{j} + \bar{k}$, $|\overline{OB}| \approx 2{,}24$

Kahden pisteen välinen vektori

Tarkastellaan pisteiden $A = (2, 1, 1)$ ja $B = (-5, 2, -3)$ välistä vektoria. Hahmotellaan pisteiden paikkavektorit $\overline{OA} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ ja $\overline{OB} = -5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$ ja muodostetaan vektori $\overline{AB}$.



$$\overline{OA} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

$$\overline{OB} = -5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$

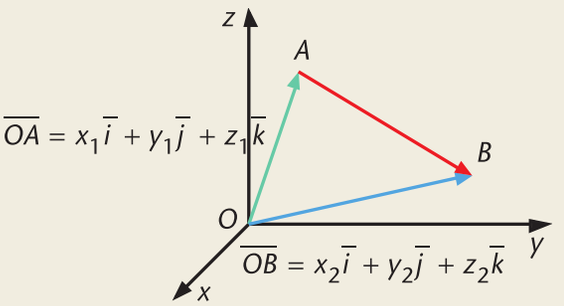
Vektori $\overline{AB}$ saadaan vektorisummana $\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB}$ eli pisteiden paikkavektoreiden erotuksena.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= -5\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k} - (2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) \\ &= (-5 - 2)\bar{i} + (2 - 1)\bar{j} + (-3 - 1)\bar{k} \\ &= -7\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}\end{aligned}$$

Loppupisteen koordinaateista vähennetään alkupisteen koordinaatit.

KAHDEN PISTEEN VÄLINEN VEKTORI

$A = (x_1, y_1, z_1)$
$B = (x_2, y_2, z_2)$



$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

ESIMERKKI 3

Määritä vektori $\overline{AB}$, kun
a) $A = (2, 4, 1)$ ja $B = (5, 9, -3)$
b) $A = (-8, 3, 5)$ ja $B = (2, -4, 3)$.

RATKAISU

a) Sovelletaan kaavaa $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$.
Loppupiste on $(x_2, y_2, z_2) = (5, 9, -3)$ ja
alkupiste on $(x_1, y_1, z_1) = (2, 4, 1)$.

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (5-2)\bar{i} + (9-4)\bar{j} + (-3-1)\bar{k} \\ &= 3\bar{i} + 5\bar{j} - 4\bar{k}\end{aligned}$$

b) Loppupiste on $(x_2, y_2, z_2) = (2, -4, 3)$ ja
alkupiste on $(x_1, y_1, z_1) = (-8, 3, 5)$.

Sijoittamalla kaavaan $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$
saadaan

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \big(2-(-8)\big)\bar{i} + (-4-3)\bar{j} + (3-5)\bar{k} \\ &= 10\bar{i} - 7\bar{j} - 2\bar{k}\end{aligned}$$

VASTAUS

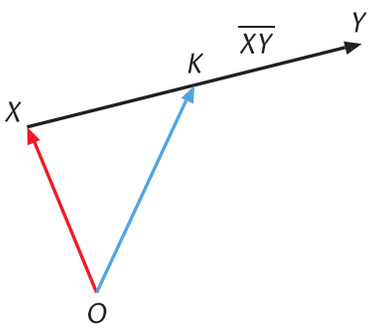
a) $\overline{AB} = 3\bar{i} + 5\bar{j} - 4\bar{k}$ b) $\overline{AB} = 10\bar{i} - 7\bar{j} - 2\bar{k}$

ESIMERKKI 4 Määritä janan XY keskipisteen koordinaatit, kun $X = (1, -2, 1)$ ja $Y = (-3, 0, 7)$.

RATKAISU Määritetään ensin vektori $\overline{XY}$.

$$\begin{aligned}\overline{XY} &= (-3-1)\bar{i} + \big(0-(-2)\big)\bar{j} + (7-1)\bar{k} \\ &= -4\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}\end{aligned}$$

Merkitään janan XY keskipistettä kirjaimella K. Tämän pisteen koordinaatit saadaan määrittämällä sen paikkavektori $\overline{OK}$.



Koska piste K jakaa janan XY kahteen yhtä suureen osaan, $\overline{XK} = \frac{1}{2}\overline{XY}$.

$$\begin{aligned}\overline{OK} &= \overline{OX} + \overline{XK} \\ &= \overline{OX} + \frac{1}{2}\overline{XY} \\ &= \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k} + \frac{1}{2}(-4\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}) \\ &= \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k} - 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k} \\ &= -\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}\end{aligned}$$

Pisteen K paikkavektori on $\overline{OK} = -\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$ eli $K = (-1, -1, 4)$.

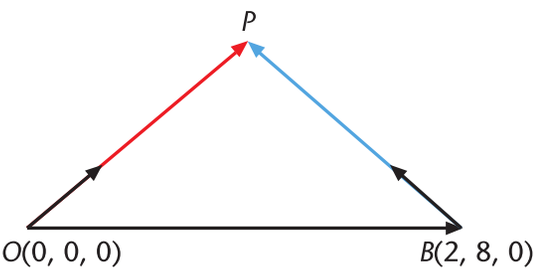
VASTAUS $K = (-1, -1, 4)$

ESIMERKKI 5

Kaupunki järjestää valoesityksen. Erivärisiä valonsäteitä lähetetään valonheittimillä taivaalle. Eräs valonsäde lähtee kauppatorilta suuntaan $2\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$. Toinen valonsäde lähtee Kaakkomäeltä suuntaan $\bar{i} - 6\bar{j} + 5\bar{k}$. Kohtaavatko valonsäteet toisensa, kun kauppatori sijaitsee pisteessä $(0, 0, 0)$ ja Kaakkomäki pisteessä $(2, 8, 0)$?

RATKAISU

Piirretään tilanteesta mallikuva. Kauppatoria merkitään pisteellä $O(0, 0, 0)$ ja Kaakkomäkeä pisteellä $B(2, 8, 0)$. Jos valonsäteet kohtaavat, on olemassa piste P, joka on vektorien $\overline{OP}$ ja $\overline{BP}$ loppupiste.



Vektori $\overline{OP}$ on vektorin $2\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ suuntainen eli

$$\overline{OP} = t\left(2\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}\right),\ t \neq 0.$$

Vektori $\overline{BP}$ on vektorin $\bar{i} - 6\bar{j} + 5\bar{k}$ suuntainen eli

$$\overline{BP} = s\left(\bar{i} - 6\bar{j} + 5\bar{k}\right),\ s \neq 0.$$

Lausutaan vektori $\overline{OP}$ vektorien $\overline{OB}$ ja $\overline{BP}$ avulla:

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \overline{OB} + \overline{BP} \\
t\left(2\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}\right) &= 2\bar{i} + 8\bar{j} + s\left(\bar{i} - 6\bar{j} + 5\bar{k}\right) \\
2t\bar{i} - 2t\bar{j} + 5t\bar{k} &= 2\bar{i} + 8\bar{j} + s\bar{i} - 6s\bar{j} + 5s\bar{k} \\
2t\bar{i} - 2t\bar{j} + 5t\bar{k} &= (2 + s)\bar{i} + (8 - 6s)\bar{j} + 5s\bar{k}
\end{aligned}$$

Vektorit $\overline{OP}$ ja $\overline{OB} + \overline{BP}$ ovat samat, jos niiden komponentit ovat samat. Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2t = 2 + s \\ -2t = 8 - 6s \\ 5t = 5s \end{cases}$$

Viimeisestä yhtälöstä saadaan $t = s$. Sijoitetaan tulos kahteen muuhun yhtälöön:

$$2t = 2 + t \qquad -2t = 8 - 6t$$
$$t = 2 \qquad 4t = 8 \quad \big| : 4$$
$$t = 2$$

Koska yhtälöistä saadaan sama ratkaisu kirjaimelle t, on olemassa leikkauspiste P. Sen paikkavektori on $\overline{OP}$:

$$\overline{OP} = 2(2\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}) = 4\bar{i} - 4\bar{j} + 10\bar{k}.$$

Valonsäteet kohtaavat toisensa pisteessä $(4, -4, 10)$.

VASTAUS Valonsäteet kohtaavat pisteessä $(4, -4, 10)$.

Tehtäviä

Paikka-vektori ja vektorin pituus

244. Määritä pisteiden $A=(-1,3,7)$, $B=\left(\frac{1}{7},-3\frac{3}{7},5\right)$ ja $C=\left(-4,0,\sqrt{3}\right)$ paikkavektorit.

245. Minkä pisteen paikkavektori on
a) $\overline{OP}=\bar{i}-3\bar{j}-7\bar{k}$ b) $\overline{OR}=-3\bar{j}-7\bar{k}$ c) $\overline{OR}=2\bar{i}-\sqrt{5}\bar{k}$?

246. Vektorin $\bar{s}=-5\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k}$ alkupiste on $(2, 3, -1)$. Määritä paikkavektorien avulla vektorin $\bar{s}$ loppupiste.

247. Vektorin $\bar{r}=8\bar{i}+\bar{j}-5\bar{k}$ loppupiste on $(0, 12, -3)$. Määritä vektorin alkupiste.

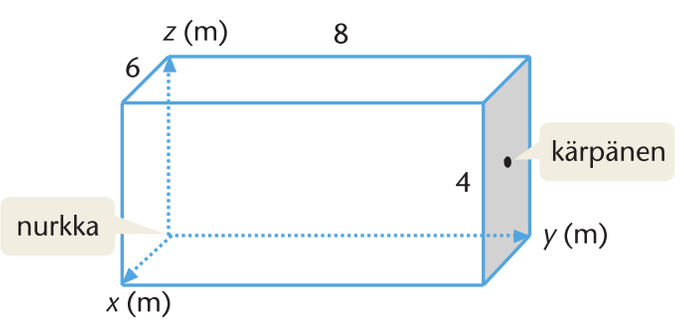
248. Määritä vektorin $\bar{a}$ pituus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun
a) $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}$ b) $\bar{a}=10\bar{i}+12\bar{j}-14\bar{k}$.

249. Laske vektorin $4\bar{a}-5\bar{b}$ pituus, kun $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ ja $\bar{b}=-3\bar{i}+2\bar{j}$.

250. Määritä vektori, joka on samansuuntainen vektorin $\bar{d}=-4\bar{j}-3\bar{k}$ kanssa ja jonka pituus on 8.

251. Vektori $\bar{a}=4\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$. Määritä
a) yksikkövektori $\bar{a}^{\circ}$
b) vektori $\bar{b}$ siten, että $\bar{b}\uparrow\uparrow\bar{a}$ ja $|\bar{b}|=7$.

252. Kärpänen lepäilee keskellä harmaalla merkittyä huoneen seinää. Olkoon kuvattu nurkka origo. Esitä kärpäsen paikkavektori ja laske sen etäisyys nurkasta.



Kahden pisteen välinen vektori

253. Määritä vektori $\overline{AB}$, kun
a) $A = (1, 4, -2)$ ja $B = (5, -2, 4)$
b) $A = (-6, 1, -3)$ ja $B = (2, -1, -1)$.

254. Määritä vakio a siten, että pisteiden $A = (-a, 2, -5)$ ja $B = (3, -4a, 1)$ välinen vektori on $\overline{AB} = \bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k}$.

255. Piste C jakaa janan AB suhteessa 1:2. Määritä pisteen C koordinaatit, kun $A = (3, 1, -5)$ ja $B = (-6, -2, -2)$.

256. Piste P jakaa janan AB suhteessa 3:4. Laske pisteen P koordinaatit, kun janan päätepisteiden paikkavektorit ovat $-\bar{i} + 3\bar{j} - 5\bar{k}$ ja $-5\bar{i} + 8\bar{j} - 10\bar{k}$.

257. Pisteestä $P_1 = (10, 0, 0)$ lähetetään valonsäde suuntaan $\overline{v_1} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 3\bar{k}$ ja pisteestä $P_2 = (310, 480, 400)$ suuntaan $\overline{v_2} = -4\bar{i} - 6\bar{j} - 5\bar{k}$. Kohtaavatko valonsäteet toisensa? [K1993, 7a]

Sekalaisia tehtäviä

258. Pisteestä $D = (3, -2, 1)$ siirrytään vektorin $-2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$ verran, jolloin tullaan pisteeseen E.
a) Määritä pisteen E koordinaatit.
b) Piste K jakaa janan DE suhteessa 1:2. Määritä pisteen K koordinaatit.

259. Pisteet $A = (-3, 4, -7)$, $B = (0, 4, -6)$ ja $C = (-5, 1, -1)$ muodostavat kolmion. Laske kolmion sivujen pituudet.

260. Pisteestä $A = (-11, 2, 13)$ siirrytään vektorin $t(-4\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k})$ verran, jolloin tullaan pisteeseen $(-23, 11, 7)$. Määritä vakio t.

261. Piste C jakaa vektorin $\overline{AB}$ suhteessa 2:7. Määritä pisteen C koordinaatit, kun $A = (-5, 6, -10)$ ja $B = (4, -3, 8)$.

262. Kaupungin näkötornin huippu sijaitsee pisteessä $A = (2, -4, 6)$ ja lennonjohtotornin huippu pisteessä $B = (1, 3, 7)$. Lentokone nousee vektorin $\overline{c} = 2\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$ suuntaisesti. Leikkaako lentokoneen nousureitti tornien huippujen välisen etäisyyden suhteessa 1:1?

5.6 Vektoreiden pistetulo eli skalaaritulo

Lukusuoralla voidaan kahden kokonaisluvun tulo tulkita summaksi, esimerkiksi $3 \cdot (-5) = -5 + (-5) + (-5)$. Vektoreilla voidaan kokonaisluvun ja vektorin tulo tulkita samalla tavalla, esimerkiksi

$$\begin{aligned} 3(-3\bar{i} + 4\bar{j}) &= (-3\bar{i} + 4\bar{j}) + (-3\bar{i} + 4\bar{j}) + (-3\bar{i} + 4\bar{j}) \\ &= -9\bar{i} + 12\bar{j} \end{aligned}$$

Vastaavaa merkitystä ei voida sopia kahden vektorin tulolle. Vektorilaskennassa esiintyy kuitenkin vektoreiden *pistetulo* eli *skalaaritulo*.

Määritellään nyt kahden tason vektorin $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ ja $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$ pistetulo seuraavalla tavalla:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Pistetulo lasketaan siis vektorien komponenttien kertoimien avulla.

TASON VEKTORIEN PISTETULO

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

jossa $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$ ja $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

ESIMERKKI 1 Laske vektorien $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j}$ ja $\bar{b} = 2\bar{i} + 6\bar{j}$ pistetulo $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

RATKAISU Pistetuloon tarvitaan vektorin komponenttien kertoimet.

$$x_1 = 3 \qquad y_1 = -5$$
$$x_2 = 2 \qquad y_2 = 6$$

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= 3 \cdot 2 - 5 \cdot 6 \\ &= -24 \end{aligned}$$

VASTAUS $\bar{a} \cdot \bar{b} = -24$

ESIMERKKI 2

Kolmion kaksi sivua muodostavat tason vektorit $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = 6\overline{i} + 2\overline{j}$. Vektorien alkupisteenä on yksi kolmion kärjistä.

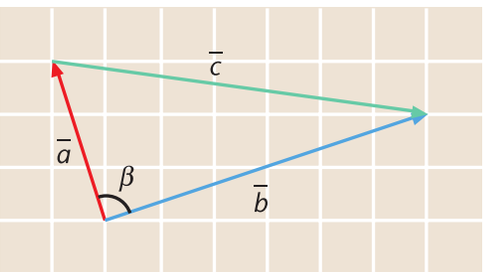
a) Määritä vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avulla vektorin $\overline{a}$ loppupisteestä alkava $\overline{c}$, joka on kolmion kolmas sivu.

b) Laske vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ pituudet ja määritä niiden avulla vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma.

c) Laske vektorien pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

RATKAISU

a) Piirretään vektorit koordinaatistoon. Vektori $\overline{c}$ voidaan lausua kahden muun summana:



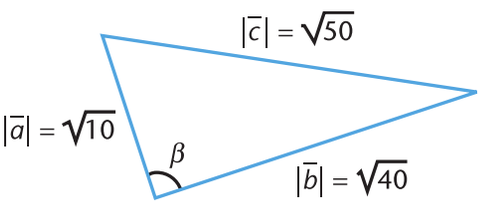
$$\begin{aligned}\overline{c} &= -\overline{a} + \overline{b} \\ &= -(-\overline{i} + 3\overline{j}) + 6\overline{i} + 2\overline{j} \\ &= \overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{i} + 2\overline{j} \\ &= 7\overline{i} - \overline{j}\end{aligned}$$

b) Lasketaan vektorien pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

$$|\overline{c}| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$$



Merkitään vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välistä kulmaa kirjaimella β. Kolmion sivujen pituudet ovat samat kuin sivuina toimivien vektorien pituudet. Kosinilauseen mukaan

$$\begin{aligned}|\overline{c}|^2 &= |\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2 - 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\beta \\ \left(\sqrt{50}\right)^2 &= \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{40}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{40} \cdot \cos\beta \\ 50 &= 10 + 40 - 40 \cdot \cos\beta \\ -40 \cdot \cos\beta &= 0 \quad \big| : (-40) \\ \cos\beta &= 0 \\ \beta &= \pm 90° + n \cdot 360°\end{aligned}$$

Koska vektorien välinen kulma on aina välillä $[0°, 180°]$, yhtälön ainoa ratkaisu on $\beta = 90°$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat siis kohtisuorassa toisiaan vastaan.

c) Pistetulon laskemiseksi määritetään vektorien $\bar{a} = -\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = 6\bar{i} + 2\bar{j}$ komponenttien kertoimet:

$x_1 = -1$ $\quad$ $y_1 = 3$
$x_2 = 6$ $\quad$ $y_2 = 2$

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{b} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ &= -1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \\ &= 0\end{aligned}$$

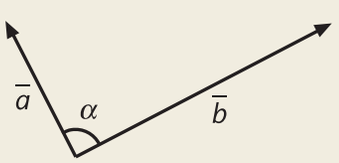
Vektorien välinen pistetulo on nolla.

VASTAUS a) $\bar{c} = 7\bar{i} - \bar{j}$ b) 90° c) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

Esimerkin kaksi vektoria ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lisäksi niiden pistetulo on nolla. Tämä tulos pitää paikkansa yleisemminkin: jos kaksi vektoria on kohtisuorassa toisiaan vastaan eli niiden välinen kulma on 90°, vektorien pistetulo on aina nolla.

VEKTORIEN KOHTISUORUUSEHTO

Jos $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, niin $\bar{a} \perp \bar{b}$ eli $\alpha = 90°$.



ESIMERKKI 3 Määritä vakio t siten, että vektorit $\overline{a} = t\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = (t+2)\overline{i} + 2t\overline{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

RATKAISU Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun niiden pistetulo on nolla.

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= 0 \\ t(t+2) + 3 \cdot 2t &= 0 \\ t^2 + 2t + 6t &= 0 \\ t^2 + 8t &= 0 \\ t(t+8) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$t = 0 \quad \text{tai} \quad t + 8 = 0$$
$$t = -8$$

Kun $t = 0$, vektorit ovat
$\overline{a} = 0\overline{i} + 3\overline{j} = 3\overline{j}$
$\overline{b} = (0+2)\overline{i} + 2 \cdot 0\overline{j} = 2\overline{i}$

Kun $t = -8$, vektorit ovat
$\overline{a} = -8\overline{i} + 3\overline{j}$
$\overline{b} = (-8+2)\overline{i} + 2 \cdot (-8)\overline{j} = -6\overline{i} - 16\overline{j}$

VASTAUS $t = 0$ tai $t = 8$

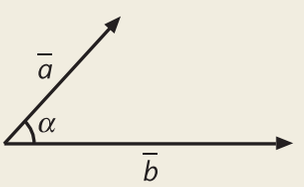
Vektorien pistetulo voidaan määritellä yleisemmin vektorien pituuksien ja niiden välisen kulman avulla. Tällöin pistetulon laskemiseen ei tarvita komponenttiesitystä kantavektorien avulla.

Voidaan osoittaa, että kahden vektorin pistetulo on vektorien pituuksien ja kulman kosinin tulo. Näin pistetulo on aina reaaliluku.

VEKTORIEN $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ PISTETULO

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$$

- $|\overline{a}|$ on vektorin $\overline{a}$ pituus
- $|\overline{b}|$ on vektorin $\overline{b}$ pituus
- α on vektorien välinen kulma



ESIMERKKI 4 Laske pistetulo $\overline{x} \cdot \overline{y}$ kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun

a) $|\overline{x}| = 5{,}2$, $|\overline{y}| = 4{,}5$ ja vektorien välinen kulma on 66°

b) $|\overline{x}| = 105$, $|\overline{y}| = 84$ ja vektorien välinen kulma on 130°.

RATKAISU

a) Sijoitetaan vektorien pituudet ja niiden välinen kulma kaavaan $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$.

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = 5{,}2 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 66° = 9{,}517... \approx 9{,}5$$

b) Sijoitetaan annetut arvot kuten a-kohdassa.

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = 105 \cdot 84 \cdot \cos 130° = -5669{,}38... \approx -5700$$

VASTAUS a) 9,5 b) –5700

ESIMERKKI 5 Laske vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma, kun $\overline{a} = -2\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = \overline{i} - 5\overline{j}$.

RATKAISU Säännöstä $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$ saadaan vektoreiden välinen kulma, kun tiedetään vektoreiden pituudet ja pistetulon arvo.

Lasketaan ensin vektoreiden pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

Lasketaan sitten pistetulo.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-5) = -2 - 15 = -17$$

Sijoitetaan lasketut arvot yhtälöön

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$$

$$-17 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\alpha \quad \Big| : \sqrt{13} \cdot \sqrt{26}$$

$$\frac{-17}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -0{,}924...$$

$$\alpha = 157{,}619...° \approx 158°$$

Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma on $\cos\alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$.

VASTAUS 158°

ESIMERKKI 6

Suunnikkaan lävistäjät ovat $\overline{d} = (x-2)\overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{e} = (3+2x)\overline{i} + x^2\overline{j}$. Määritä vakio x siten, että kyseessä on neljäkäs. Mitkä ovat neljäkkään lävistäjävektorit?

RATKAISU

Neljäkäs on suunnikas, jonka sivut ovat samanpituiset ja lävistäjät ovat kohtisuorassa.

Kun lävistäjät ovat kohtisuorassa, pistetulo $\overline{d} \cdot \overline{e} = 0$.

$$\left((x-2)\overline{i} - \overline{j}\right) \cdot \left((3+2x)\overline{i} + x^2\overline{j}\right) = 0$$

$$(x-2)(3+2x) - x^2 = 0$$

$$3x + 2x^2 - 6 - 4x - x^2 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Määritetään lävistäjävektorit $\overline{d}$ ja $\overline{e}$.

$x = 3$	$x = -2$
$\overline{d} = (3-2)\overline{i} - \overline{j} = \overline{i} - \overline{j}$	$\overline{d} = (-2-2)\overline{i} - \overline{j} = -4\overline{i} - \overline{j}$
$\overline{e} = (3+2\cdot 3)\overline{i} + 3^2\overline{j} = 9\overline{i} + 9\overline{j}$	$\overline{e} = \left(3+2\cdot(-2)\right)\overline{i} + (-2)^2\overline{j} = -\overline{i} + 4\overline{j}$

VASTAUS

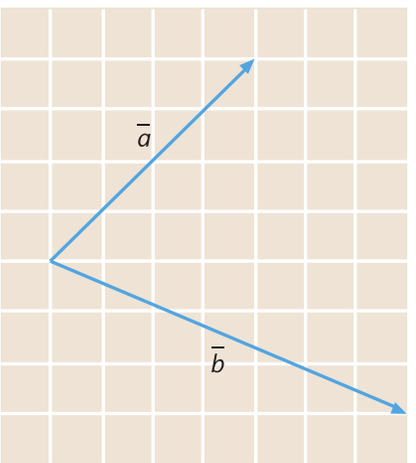
Kun $x = 3$, lävistäjät ovat $\overline{d} = \overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{e} = 9\overline{i} + 9\overline{j}$.
Kun $x = -2$, lävistäjät ovat $\overline{d} = -4\overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{e} = -\overline{i} + 4\overline{j}$.

Tehtäviä

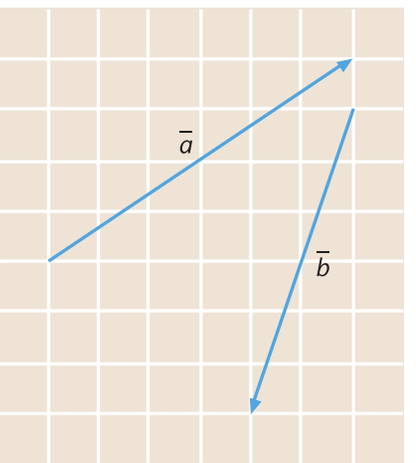
263. Määritä $\overline{r} \cdot \overline{s}$, kun
a) $\overline{r} = -5\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{s} = 2\overline{i} - 3\overline{j}$
b) $\overline{r} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{s} = -\overline{i} + 8\overline{j} - 10\overline{k}$.

264. Lausu vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ kantavektorien $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ avulla ja laske pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

a)



b)



265. Osoita, että vektorit $\overline{a} = 7\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = -6\overline{i} + 21\overline{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

266. Vektorit $\overline{i}$ ja $a\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}$ ovat suunnikkaan sivuina. Millä a:n arvoilla suunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan? [K1987, 7b]

267. Kolmion kärjet sijaitsevat pisteissä $A = (-5, 5)$, $B = (-3, 3)$ ja $C = (1, 7)$. Muodosta vektorit $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{CA}$. Osoita vektorien avulla, että kolmio on suorakulmainen.

268. Määritä vakio r siten, että vektorit $\overline{f} = r\overline{i} + \overline{j}$ ja $\overline{g} = (r+1)\overline{i} - 2\overline{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

269. Suora l on vektorin $\overline{a} = -4\overline{i} + 10\overline{j}$ suuntainen. Tutki, onko vektori $\overline{b} = 3\overline{i} + \frac{12}{10}\overline{j}$ kohtisuorassa suoraa vastaan.

270. Laske $\overline{a} \cdot \overline{b}$, kun
a) $|\overline{a}| = 10$, $|\overline{b}| = 8$ ja vektorien välinen kulma $\alpha = 120°$
b) $|\overline{a}| = 24$, $|\overline{b}| = 5$ ja vektorien välinen kulma $\alpha = 30°$.

271. Laske vektoreiden välinen kulma, kun

a) $\overline{c} = 16\overline{i} - 10\overline{j}$ ja $\overline{d} = \frac{5}{4}\overline{i} + 2\overline{j}$

b) $\overline{c} = -6\overline{i} + 16\overline{j}$ ja $\overline{d} = -7\overline{i} + 2\overline{j}$.

272. Määritä vektoreiden avulla kolmion ABC kulmat, kun $A = (1, 3)$, $B = (3, 1)$ ja $C = (2, 4)$.

273. Kolmion kahta sivua esittävät vektorit $\overline{AB} = \overline{i} + 4\overline{j}$ ja $\overline{AC} = 4\overline{i} + 2\overline{j}$. Laske vektorien välinen kulma sekä kolmion ala.

274. Suunnikkaan kahta sivua esittävät vektorit $\overline{AB} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{AD} = 4\overline{i} - 2\overline{j}$.

a) Määritä muut kärkipisteet, $A = (0, 0)$.

b) Laske vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ välinen kulma ja suunnikkaan ala kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Sekalaisia tehtäviä

275. Laske $\overline{a} \cdot \overline{b}$, kun

a) $\overline{a} = -4\overline{i} + 13\overline{j}$ ja $\overline{b} = \frac{1}{2}\overline{i} - 5\overline{j}$

b) $\overline{a} = -\overline{i} + 1\frac{2}{3}\overline{j} + 4\overline{k}$ ja $\overline{b} = -\frac{4}{5}\overline{i} - 3\overline{j} - 6\overline{k}$.

276. Laske $\overline{a} \cdot \overline{b}$, kun

a) $|\overline{a}| = 4$ ja $|\overline{b}| = 11$ ja vektorien välinen kulma $\alpha = 60°$

b) $\overline{a} = \overline{AB}$ ja $\overline{b} = \overline{AC}$. Vektorien alku ja loppupisteiden koordinaatit ovat $A = (2, -6)$, $B = (-4, -9)$ ja $C = (4, 0)$.

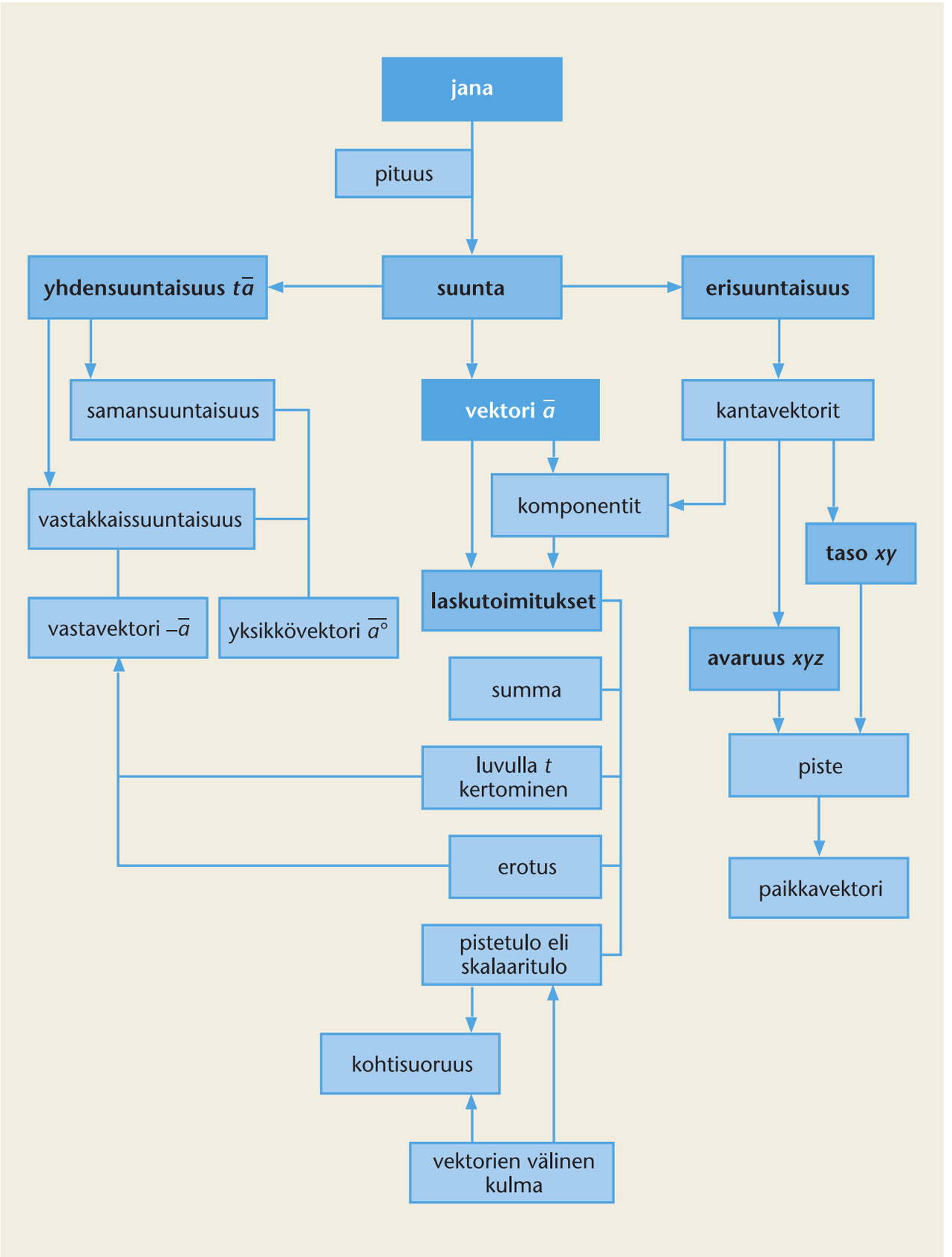
277. Määritä vektorien $\overline{s}$ ja $\overline{t}$ välinen kulma asteen tarkkuudella, kun

a) $\overline{s} = 2\overline{i} - 7\overline{j}$ ja $\overline{t} = \overline{i} - 2\overline{j}$

b) $\overline{s} = -\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{t} = 10\overline{i} + 4\overline{j} - \overline{k}$.

278. Vektorit $\overline{u} = 12\overline{i} + 5\overline{j}$ ja $\overline{v} = 5\overline{i} + 12\overline{j}$ ovat suunnikkaan sivuina. Määritä lävistäjävektorit $\overline{u} - \overline{v}$ ja $\overline{u} + \overline{v}$ ja laske niiden välinen kulma ja niiden pituuksien suhde. [K1995, 7b]

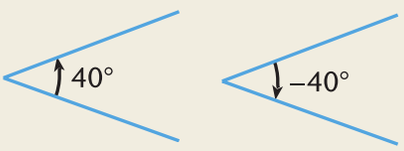
Keskeisiä käsitteitä vektoreista



Kertausosa

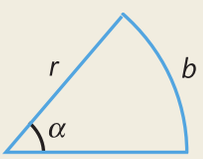
Erilaisia kulmia ja kulmanyksiköitä

- **Suunnattu kulma** syntyy, kun kahdesta päällekkäin asetetusta puolisuorasta toinen jää paikalleen ja toista kierretään vastapäivään (positiivinen kulma) tai myötäpäivään (negatiivinen kulma).



- Kulman suuruus ilmoitetaan yleensä **asteina** tai **radiaaneina.**

- Radiaanin määritelmä on $\alpha = \frac{b}{r}$.

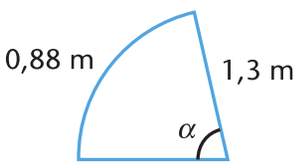


- Kulmanyksiköiden muuntaminen:

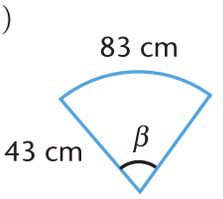
$1° = \frac{\pi}{180}$ (rad) $1\text{ (rad)} = \frac{180°}{\pi}$

1. Kuinka monen asteen kulma syntyy auton renkaan pyörähtäessä
   a) 1,6 kierrosta, kun auto liikkuu eteenpäin
   b) 2,4 kierrosta, kun auto peruuttaa?

2. Laske kulmien suuruudet radiaaneina.
   a)



   b)



3. Muunna asteet radiaaneiksi. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
   a) 51,0° b) 127° c) 445°

4. Muunna radiaanit asteiksi. Anna vastaus asteen tarkkuudella.
   a) 6,12 b) 0,24 c) 11,0

5. Ympyräsektorin kaari on 3,0 cm lyhyempi kuin ympyrän säde. Sektorin keskuskulman suuruus on radiaaneina 0,6. Määritä säteen pituus.

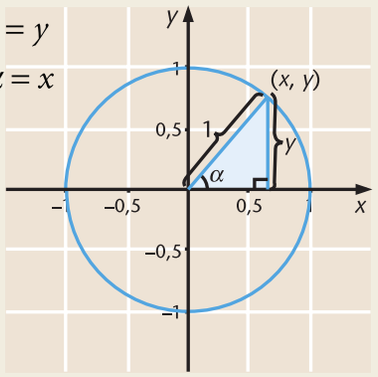
Sini, kosini ja tangentti

- **Trigonometrisista funktioista** sini ja kosini määritellään yksikköympyrän avulla seuraavasti:
  sini on kulmaa α vastaavan kehäpisteen ***y*-koordinaatti** ja **kosini *x*-koordinaatti.**

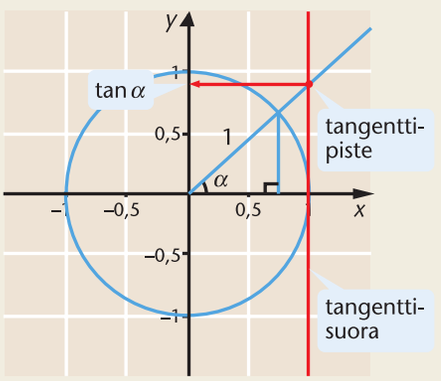
6. Määritä laskimen avulla likiarvot kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella lausekkeille
   a) $\sin\frac{\pi}{8}$ b) $\cos\frac{2\pi}{5}$ c) $\tan\frac{\pi}{11}$.

$\sin\alpha = y$

$\cos\alpha = x$



- **Tangentti** voidaan määritellä pisteeseen $(1, 0)$ piirretyn **tangenttisuoran** avulla: kulman α **vasemman** kyljen ja tangenttisuoran leikkauspistettä sanotaan **tangenttipisteeksi.** Tämän pisteen y-koordinaatti on **tan** α.



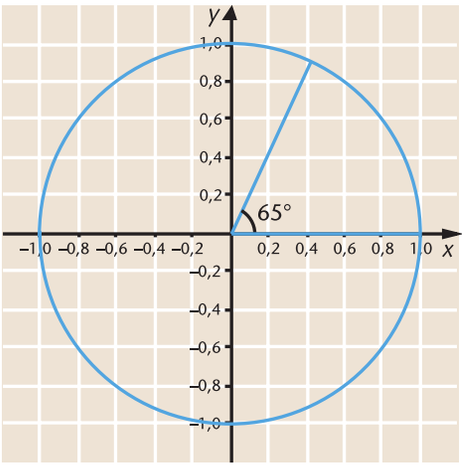
- Trigonometrisia funktioita sitoo toisiinsa yhtälö

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

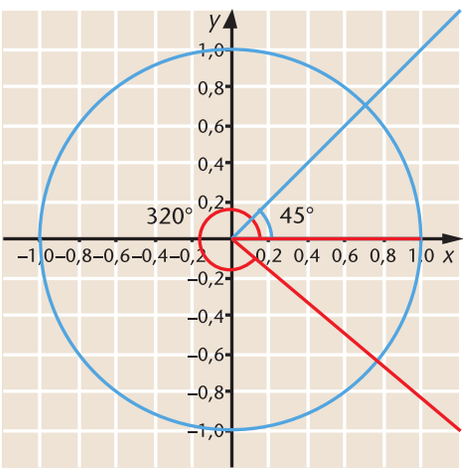
- Trigonometristen funktioiden merkki yksikköympyrän eri neljänneksissä:

Neljännes	Sini	Kosini	Tangentti
I	+	+	+
II	+	–	–
III	–	–	+
IV	–	+	–

7. Määritä kuvan avulla yhden merkitsevän numeron tarkkuudella
a) $\sin 65°$
b) $\sin 295°$
c) $\cos 65°$
d) $\cos 115°$.
Tarkista tuloksesi laskimella.



8. Määritä kuvan avulla
a) $\tan 45°$
b) $\tan 320°$
c) $\sin 45°$
d) $\cos 45°$
e) $\sin 320°$
f) $\cos 320°$
Anna vastaukset yhden merkitsevän numeron tarkkuudella.



9. Määritä tarkka arvo lausekkeelle $\tan\beta$, kun tiedetään, että $\sin\beta = \frac{1}{4}$ ja kulma β sijaitsee ensimmäisessä neljänneksessä. Käytä hyödyksi yhtälöä $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

10. Kulmasta β tiedetään, että
a) $\sin\beta = 0{,}35$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän toisessa neljänneksessä
b) $\tan\beta = 5{,}0$ ja kulmaa vastaava kehäpiste sijaitsee yksikköympyrän kolmannessa neljänneksessä.
Piirrä kulma β yksikköympyrään ja mittaa kulma asteen tarkkuudella.

11. Osoita oikeaksi yhtälö $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$. Voit käyttää apuna yhtälöä $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

12. Määritä $\tan 150°$ tarkka arvo, kun tiedetään, että

- $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\tan 120° = -\sqrt{3}$
- $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

Siniyhtälö

- Yhtälön $\sin\alpha = y$ ratkaisut ovat

  $\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai

  $\alpha = 180° - \alpha_0 + n \cdot 360°$,

  jossa $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

13. Ratkaise yhtälö kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Ilmoita vastaus asteina.
    a) $\sin x = 0{,}54$ b) $\sin x = -0{,}26$

14. Ratkaise yhtälö $\sin 2\beta = 0{,}40$ asteina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

15. Pelle pomppii hyppykepillä. Jokainen hyppy on saman pituinen ja hyppy käy samalla korkeudella. Yksittäisen hypyn korkeutta s (cm) maanpinnasta kuvaa yhtälö $s = 48\sin(75t°)$, jossa t on aika sekunteina. Milloin hypyn korkeus on ensimmäisen kerran 24 cm?

16. Ratkaise radiaaneina yhtälö $5\sin 3x - 4 = 0$ kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

Kosini- ja tangenttiyhtälöt

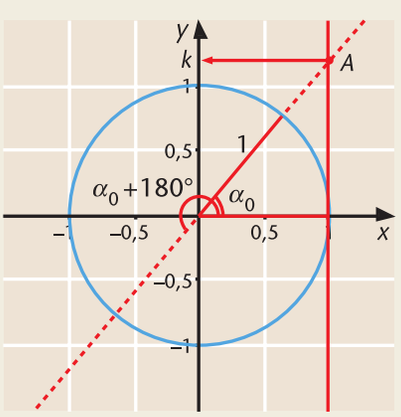
- Yhtälön $\cos\alpha = x$ ratkaisut ovat

  $\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$ tai
  $\alpha = -\alpha_0 + n \cdot 360°$,
  $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

- Yhtälön $\tan\alpha = k$ ratkaisut ovat

  $\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180°$,
  $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

- Kulman tangenttipiste on A.



17. Ratkaise yhtälö sekä asteina että radiaaneina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
    a) $\cos\alpha = 0{,}15$ b) $\tan\alpha = 18$

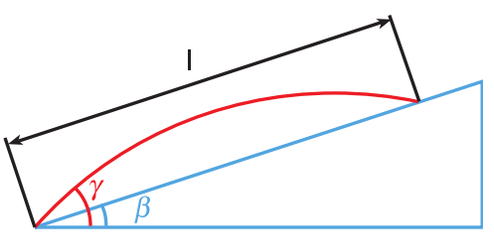
18. Ratkaise taulukkokirjan avulla radiaaneina yhtälöt käyttämättä likiarvoja.
    a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

19. Ratkaise yhtälöt asteina kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
    a) $3\cos 4x = 1$ b) $\tan 2x - 5 = 2$

20. Eräässä kokeessa osoitettiin, että ammuksen kantama l riippui lähtönopeudesta v_0 sekä kulmista γ ja β seuraavasti:

    $l = Q \cdot (v_0)^2(\tan\gamma - \tan\beta)$.

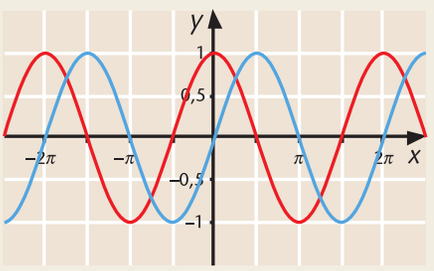
    Vakion Q arvo riippui mainituista kulmista. Lähtönopeudella 47 m/s kantama oli 120 m alustan jyrkkyyden (β) ollessa 18°. Missä kulmassa (γ) luoti lähti lentoon, kun kokeessa $Q = 0{,}144$ s^2/m?



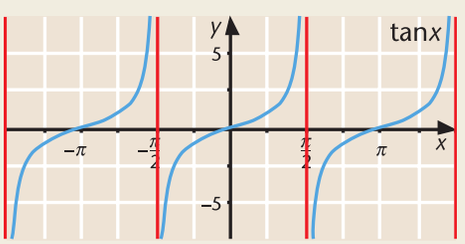
21. Rannikolla sijaitsevassa mittauspisteessä veden syvyys h (m) voidaan laskea yhtälöllä $h = 4{,}0\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 32{,}0$. Syvyys on suurimmillaan kello 1.00 yöllä, jolloin $t = 0$. t on aika tunteina alkaen hetkestä, jolloin syvyys on suurimmillaan. Mihin kellonaikaan veden syvyys on ensimmäisen kerran 30,0 m?

Trigonometristen funktioiden jaksollisuus

- Sini ja kosini ovat **jaksollisia funktioita.** Molempien jakso on 2π, eli niiden arvot toistuvat 2π:n välein.

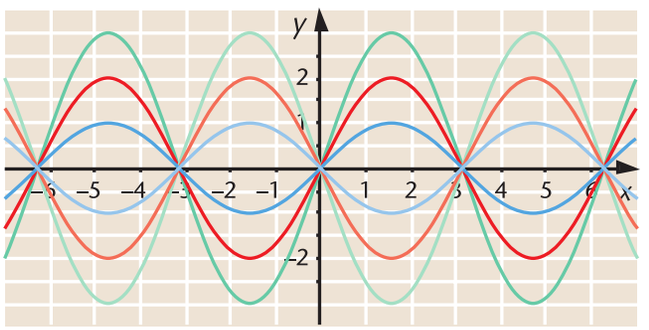


- Myös tangentti on jaksollinen funktio, mutta sen jaksona on π.



22. Piirrä funktion $f(x) = \cos\frac{1}{2}x$ kuvaaja välillä $[-4\pi, 4\pi]$.

23. Kuvassa on funktion $g(x) = A\sin x$ kuvaajia eri A:n arvoilla. Päättele kuvaajan avulla nämä arvot.



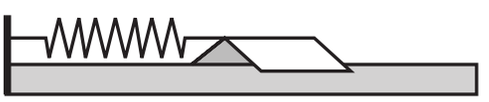
24. Ratkaise viereisen kuvan avulla graafisesti yhtälö $\tan x = 3$.

25. Määritä funktion f nollakohdat asteina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, kun
a) $f(x) = -2\cos 2x + 0{,}2$ b) $f(x) = \tan 2x - 6$.

Sovelluksia

- Trigonometrisilla funktioilla voidaan mallintaa **jaksollisia ilmiöitä**, joita ovat esimerkiksi
  - harmoninen värähtely
  - vuoroveden vaihtelu
  - aaltoliike.

26. Ilmatyynyradalla tutkittiin jouseen kiinnitetyn vaunun liikettä. Vaunun paikkaa (cm) ajan t (s) funktiona kuvaa funktio $f(t) = 5{,}0\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$.
a) Millä ajanhetkillä tarkastelun alusta lukien vaunu ensimmäisen kerran sijaitsee kaikkein kauimpana tasapainoasemastaan?
b) Mikä on tällöin vaunun etäisyys tasapainoasemasta?



- **Aaltoliikkeen muotoja** ovat esimerkiksi
  - näkyvä valo
  - radioaallot
  - röntgensäteily
  - ääni
  - gravitaatioaallot.

- Malleissa hyödynnetään kahta sinin ja kosinin ominaisuutta:
  1. sini ja kosini on määritelty kaikilla reaalilukujen arvoilla
  2. sinin ja kosinin arvot vaihtelevat välillä $[-1, 1]$.

  Esimerkiksi funktio $f(x) = 5\sin x$ saa siis kaikki arvot väliltä $[-5, 5]$.

27. Liikuntatunnilla aloitetaan alkulämmittely käsien pyörityksellä. Vasen käsi ojennetaan ensin sivulle, minkä jälkeen sitä pyöritetään myötäpäivään ympäri vartalon edestä. Lillin sormenpäiden etäisyyttä maanpinnasta (cm) kuvaa funktio

$f(t) = 130 + 50\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, jossa t on aika sekunteina aloitushetkestä.

a) Laske sormien etäisyys maanpinnasta hetkellä $t = 5{,}4$ s.

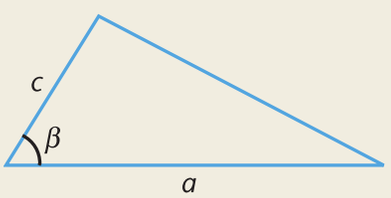
b) Milloin sormien etäisyys maanpinnasta on ensimmäisellä kierroksella 155 cm?

c) Kuinka kauan aikaa kuluu yhteen pyörähdykseen?

Kolmion ja suunnikkaan ala

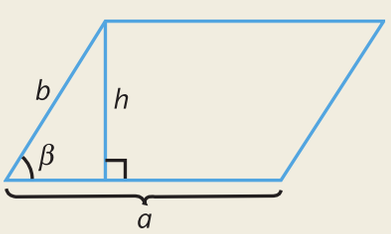
- **Kolmion ala** voidaan laskea, jos tunnetaan kaksi kolmion sivua sekä niiden välinen kulma:

$$A = \frac{1}{2}ac\sin\beta.$$



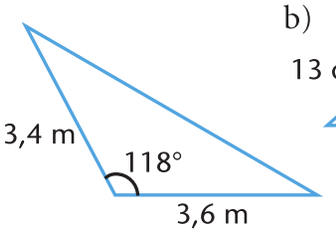
- **Suunnikkaan ala** kahden sivun ja niiden välisen kulman avulla laskettuna on

$$A = ah = ab\sin\beta.$$

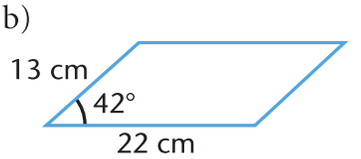


28. Laske kuvioiden alat.

a)



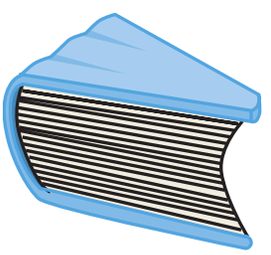
b)



29. Kolmion sivut ovat 76 cm ja 115 cm. Kolmion ala on 37,1 dm^2. Laske sivujen välinen kulma.

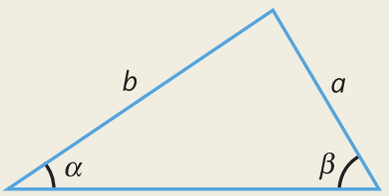
30. Likimain kolmion muotoisen järven sivujen pituudet ovat 3,5 km, 4,0 km ja 4,1 km. Kahden pisimmän sivun välinen kulma on 51°. Laske järven ala.

31. Kuvan muistikirja on muodoltaan likimain suora särmiö, jonka pohja on tasakylkinen kolmio. Kolmion kyljet ovat pituudeltaan 18 cm ja niiden välinen kulma on 30°.
Kirjan paksuus on 7,5 cm.
Laske kirjan tilavuus.



Sinilause

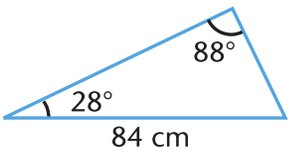
- **Sinilauseen mukaan** kolmiolle on voimassa yhtälö
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$



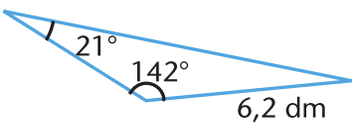
- Sinilauseen avulla voidaan ratkaista kolmion sivuja ja kulmia, kun tunnetaan
  - kaksi sivua ja toisen sivun vastainen kulma
  - kaksi kulmaa ja toisen kulman vastainen sivu.

32. Laske sivun pituus x.

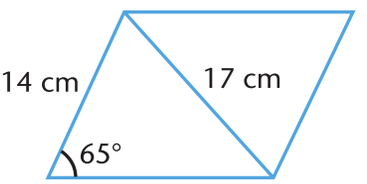
a)



b)

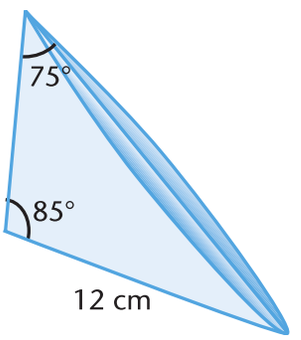


33. Laske kuvan suunnikkaan ala.



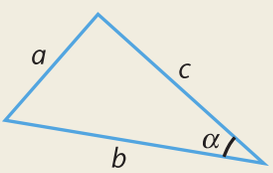
34. Laske kolmion muotoon taitellun lautasliinan ala.

35. Kolmion kaksi sivua ovat 2,9 m ja 1,7 m. Näistä sivuista pidemmän vastainen kulma on 72°. Laske kolmion muut kulmat.



Kosinilause

- **Kosinilauseen** mukaan kolmiolle on voimassa yhtälö
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

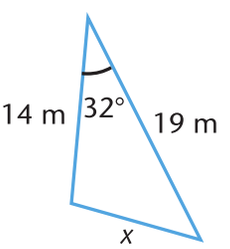


- Lauseen avulla voidaan ratkaista kolmion kolmas sivu, kun kaksi sivua ja niiden välinen kulma tunnetaan.

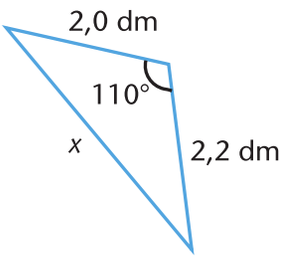
- Myös kulmien ratkaiseminen on mahdollista, jos kolmiosta tunnetaan kaikki sivut.

36. Laske sivun x pituus.

a)



b)



37. Kolmion sivut ovat 4,5 dm, 5,2 dm ja 6,0 dm. Määritä kolmion kulmat.

38. Luonnonpuistossa on kolme lintutornia, Pöllö, Varpunen ja Metso. Pöllön ja Varpusen välinen etäisyys on 3,2 km, ja Metson etäisyys Pöllöstä on 4,1 km. Pöllöstä nähdään molemmat muut tornit 50° kulmassa (eli etäisyysjanojen Pöllö-Varpunen ja Pöllö-Metso väliin muodostuu kyseinen kulma). Laske Metson ja Varpusen välinen etäisyys. Piirrä kuva tilanteesta.

39. Tulisija on muodoltaan suora särmiö. Sen tilavuus on 1,04 m^3 ja pohjakolmion sivujen pituudet ovat 1,60 m, 1,40 m ja 1,46 m. Laske tulisijan korkeus.

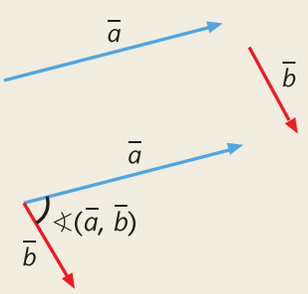
Peruskäsitteitä

- **Yhdensuuntaisia vektoreita ovat**
  - samansuuntaiset vektorit, $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$
  - vastakkaissuuntaiset vektorit, $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$
  - vastavektorit, $\overline{a}$ ja $-\overline{a}$
  - identtiset eli yhtä suuret vektorit:

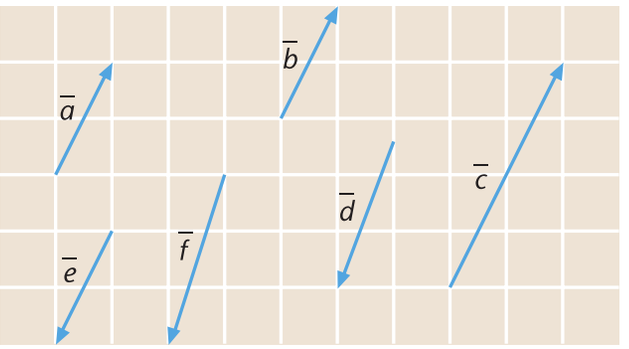
    $\overline{a} = \overline{b}$, kun $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ ja vektoreiden pituudet ovat samat.
- Yhdensuuntaisuutta merkitään $\overline{a} \parallel \overline{b}$.
- **Yksikkövektori** saadaan, kun vektori jaetaan pituudellaan. Yksikkövektorin pituus on yksi yksikkö.

$$\overline{a^\circ} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$$

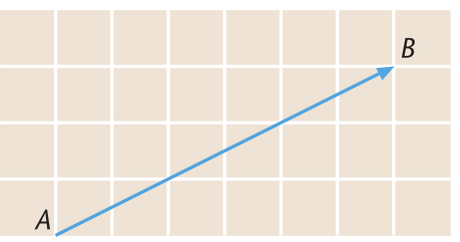
- **Nollavektorin** suuntaa ei ole määrätty, mutta sen pituus on nolla.
- **Erisuuntaiset vektorit** eivät ole yhdensuuntaisia. Tätä merkitään $\overline{a} \nparallel \overline{b}$.
- **Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma** α saadaan, kun vektorit asetetaan alkamaan samasta pisteestä, $0 \le \alpha \le 180°$.



40. Määritä kuvan avulla kaikki ne vektorit $\overline{x}$, joille on voimassa ehto
a) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{x}$ b) $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{x}$ c) $\overline{a} \parallel \overline{x}$
d) $\overline{a} = \overline{x}$ e) $\overline{a} \nparallel \overline{x}$.



41. Vektorin $\overline{AB}$ pituus on 3. Piirrä annetun vektorin
a) vastavektori
b) kanssa samansuuntainen vektori
c) kanssa erisuuntainen vektori
d) yksikkövektori.

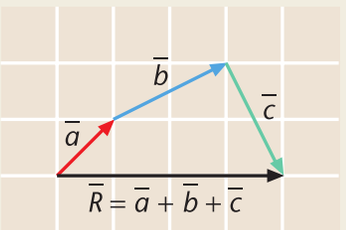


42. Säätieteilijä mittaa tuulen nopeudeksi maaston kohdassa A $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ suoraan pohjoiseen. Kohdassa B tuulee idästä $1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja kohdassa C lännestä $3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Piirrä tuulen nopeusvektori koordinaatistoon kohdassa A sekä tämän avulla nopeusvektorit kohdissa B ja C.

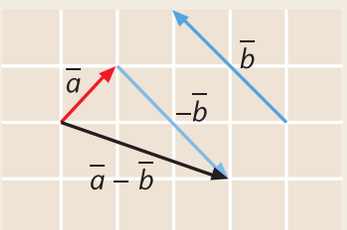
43. Merkitään koordinaatistoon pisteet $A = (0, 0)$, $B = (3, 2)$, $C = (0, 1)$, $D = (2, -1)$ ja $E = (5, 2)$. Piirrä vektorit $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ ja $\overline{EB}$. Määritä vektorien
a) $\overline{DE}$ ja $\overline{AC}$ b) $\overline{DE}$ ja $\overline{EB}$
välinen kulma

Laskutoimitukset

- Vektorit liitetään peräkkäin suuntansa ja pituutensa säilyttäen. Vektorien **summa eli resultantti** $\overline{R}$ saadaan, kun ensimmäisen vektorin alkupiste yhdistetään viimeisen loppupisteeseen.



- Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ **erotus** $\overline{a}-\overline{b}$ saadaan lisäämällä vektoriin $\overline{a}$ vektorin $\overline{b}$ vastavektori $-\overline{b}$ eli $\overline{a}+(-\overline{b})=\overline{a}-\overline{b}$.



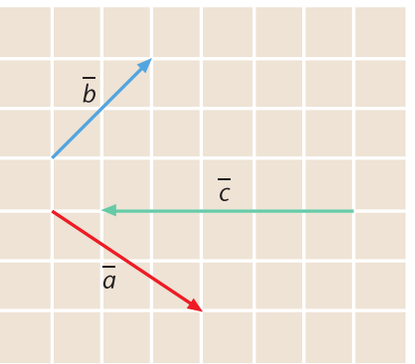
- Vektoria $\overline{a}$ voidaan **kertoa reaaliluvulla** t, jolloin vektorin pituus muuttuu ja suunta voi muuttua vastakkaiseksi tai pysyä samana.

$t\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$, jos $t>0$
$t\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$, jos $t<0$
$t\overline{a}=0$, jos $t=0$

- Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaisia eli

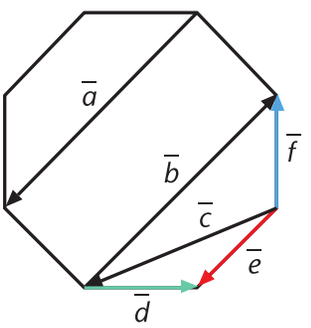
$\overline{a} \parallel \overline{b}$, jos $\overline{a}=t\overline{b}$, jossa $t \neq 0$.

44. Piirrä koordinaatistoon vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla
a) $-2\overline{a}$ b) $1{,}5\overline{b}$ c) $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ d) $\overline{b}-\overline{c}$.



45. Piirrä koordinaatistoon tehtävän 44 vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla
a) $-2\overline{a}-1{,}5\overline{b}$ b) $\overline{a}-1{,}5\overline{b}-\overline{c}$.

46. Kuvan monikulmio on säännöllinen kahdeksankulmio, jonka kolmea sivua kuvaavat vektorit $\overline{d}$, $\overline{e}$ ja $\overline{f}$. Määritä vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ annettujen sivuvektorien avulla.

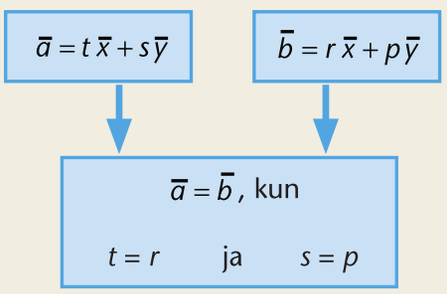


47. Onko $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, kun
a) $\overline{a}=\overline{b}$ b) $\frac{1}{2}\overline{a}=\overline{b}$ c) $\overline{a}=-3\overline{b}$ d) $4\overline{a}-5\overline{b}=\overline{0}$.

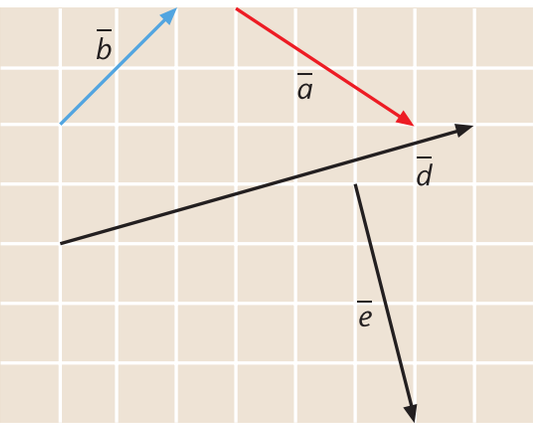
48. Pekka ja Tapio ovat patikoimassa Lapissa. He seisovat ison kukkulan edessä polun päässä. Kaverukset päättävät kiivetä kukkulalle. Pekka kävelee kukkulan oikealle reunalle. Tätä siirtymää kuvaa vektori $\overline{a}+4\overline{b}$. Tapio siirtyy vasemmalle reunalle. Siirtymää kuvaa vektori $5\overline{a}+10\overline{b}$. Suoraa etenemistä polun päästä huipulle kuvaa vektori $4\overline{a}+3\overline{b}$. Määritä Tapion ja Pekan siirtymävektorit $\overline{t}$ ja $\overline{p}$ kukkulan reunoilta huipulle.

Komponentteihin jako

- Tason vektorit voidaan jakaa kahteen erisuuntaiseen **komponenttiin**. Komponenttien summana saadaan tarkasteltava vektori.
- Vektorit ovat yhtä suuret eli identtiset, kun niiden komponentit ovat samat



49. Jaa vektorit $\overline{d}$ ja $\overline{e}$ vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ suuntaisiin komponentteihin.



50. Jaa vektori $-7\overline{i} - \overline{j}$ vektorien $2\overline{i} - \overline{j}$ ja $\overline{i} + 4\overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

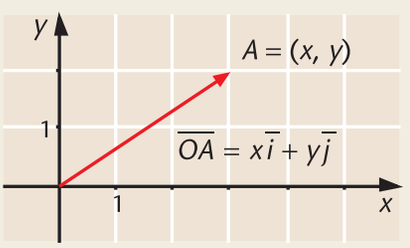
51. Jaa vektori $5\overline{i} + 6\overline{j} - \overline{k}$ vektoreiden $\overline{i} + \overline{k}$ ja $\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ suuntaisiin komponentteihin.

52. Millä vakioiden k ja s arvoilla vektorit $-2k(\overline{a} - 5\overline{b}) - s(-\overline{a} + 3\overline{b})$ ja $-3\overline{a} + 23\overline{b}$ ovat identtiset eli samat?

53. Olkoon $\overline{u} = 2x\overline{i} + 7\overline{j} - 2\overline{k}$ ja $\overline{v} = 6\overline{i} - 14\overline{j} + 4\overline{k}$. Määritä vakio x siten, että $\overline{u} \parallel \overline{v}$. Ovatko vektorit tällöin samansuuntaiset?

Vektorit *xy*-koordinaatistossa

- *xy*-tason **kantavektorit** ovat $\overline{i}$ ja $\overline{j}$.
- Pisteen $A = (x, y)$ **paikkavektori** on origosta pisteeseen A piirretty vektori $\overline{OA}$.



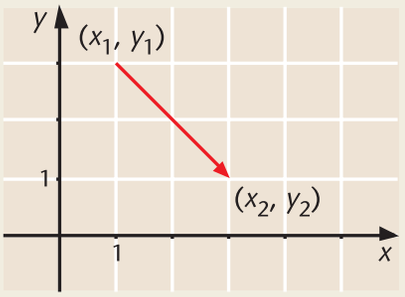
54. Piirrä vektorit $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = -4\overline{i} - 3\overline{j}$. Määritä
a) vektoreiden pituudet
b) $\overline{b}^{\circ}$
c) $\overline{a} + \overline{b}$
d) $\overline{a} - \overline{b}$
e) $-2\overline{a} - 5{,}5\overline{b}$.

55. Määritä pisteiden $A = (2, 4)$ ja $B = (-1, 3)$ paikkavektorit ja piirrä ne koordinaatistoon. Mikä pitäisi pisteen A y-koordinaatin olla, että vektorit $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ olisivat vastakkaissuuntaiset?

- Vektorin $\overline{a} = r\overline{i} + t\overline{j}$ **pituus** $|\overline{a}| = \sqrt{r^2 + t^2}$.

- **Pisteiden** $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ **välinen vektori**

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}.$$



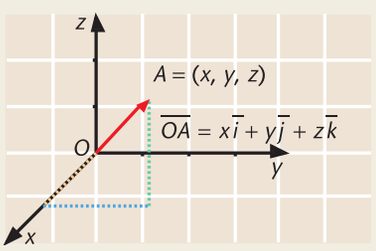
56. Pisteet $A = (3, -1)$, $B = (3, 2)$ ja $C = (0, 6)$ muodostavat kolmion. Laske kolmion sivuvektorien pituudet.

57. Janan päätepisteet ovat $A = (5, 1)$ ja $B = (-4, -2)$. Määritä piste, joka jakaa janan AB suhteessa 1:2.

Vektorit *xyz*-koordinaatistossa

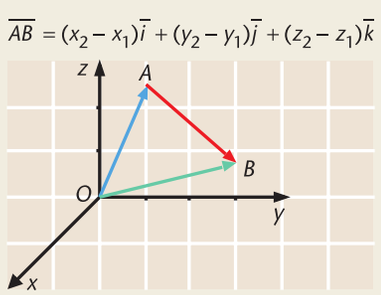
- Avaruuden *xyz* **kantavektorit** ovat $\overline{i}$, $\overline{j}$ ja $\overline{k}$.

- Jokainen avaruuden *xyz* vektori voidaan esittää kantavektoreiden avulla **komponenttiensa** summana.



- Vektorin $\overline{a} = r\overline{i} + t\overline{j} + u\overline{k}$ **pituus** $|\overline{a}| = \sqrt{r^2 + t^2 + u^2}$.

- **Pisteiden** $A = (x_1, y_1, z_1)$ ja $B = (x_2, y_2, z_2)$ **välinen vektori**



58. Määritä vektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ avulla
a) $\overline{b} - \overline{a}$ b) $\overline{a} - \overline{b}$ c) $|\overline{a} + 2\overline{b}|$, kun $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k}$.

59. Avaruuskoordinaatistossa on pisteet $A = (-2, -3, 6)$ ja $B = (5, -12, 1)$. Määritä
a) pisteiden paikkavektorit
b) pisteen A paikkavektorin yksikkövektori
c) pisteen B paikkavektorin pituus.

60. Olkoon $\overline{a} = t\overline{i} + 6\overline{k}$ ja $|\overline{a}| = 10$. Määritä vakio t.

61. Pisteestä (1, 2, 1) piirretään vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$. Vektoreiden loppupisteet ovat vastaavasti $A = (0, -3, 5)$, $B = (-5, 7, 11)$ ja $C = (2, -1, 9)$. Määritä vektori $\overline{d}$ siten, että $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = \overline{0}$.

62. a) Määritä paikkavektorin avulla janan XY keskipisteen koordinaatit, kun janan päätepisteet ovat $(-5, 1, -2)$ ja $(-1, 3, 0)$.
b) Miten janan keskipisteen koordinaatit saadaan päätepisteiden koordinaattien avulla?

Vektoreiden pistetulo

- **Pistetulo eli skalaaritulo** voidaan laskea kahdella eri tavalla:
  1. Jos tiedetään vektoreiden välinen kulma α sekä vektoreiden pituudet, niin $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$.
  2. Jos vektoreiden välistä kulmaa ei tiedetä, niin tasossa $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ ja avaruudessa $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

- Pistetulon arvo on aina reaaliluku. Jos pistetulo on nolla, niin vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

  Jos $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$,
  niin $\overline{a} \perp \overline{b}$ eli $\alpha = 90°$.

- **Vektoreiden välinen kulma** saadaan pistetulon avulla

$$\cos\alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}.$$

63. Olkoon $\overline{a} = -3\overline{i} + 2\overline{j}$ ja $\overline{b} = 7\overline{i} - 9\overline{j}$. Määritä
    a) $\overline{a} \cdot \overline{b}$
    b) vektoreiden välinen kulma asteen tarkkuudella.

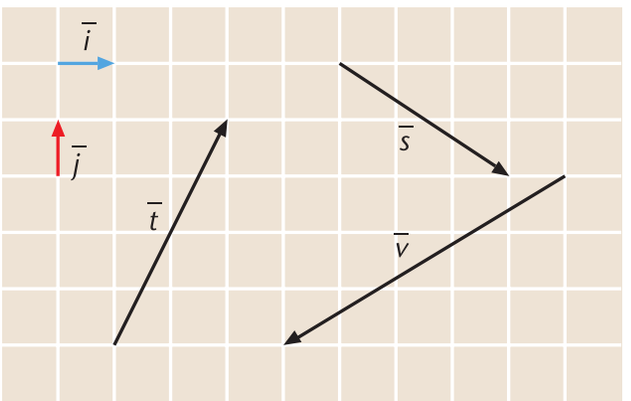
64. Origosta alkavat vektorit $\overline{a} = 4\overline{i} + x\overline{j}$ ja $\overline{b} = -5\overline{k}$ ovat tasakylkisen kolmion kylkinä. Määritä
    a) vakio x
    b) huippukulman suuruus.

65. Määritä vektorit $\overline{a} = -3x\overline{i} + x\overline{j}$ ja $\overline{b} = -x\overline{i} + 2\overline{j}$ siten, että vektorit ovat suorakulmaisen kolmion kateetteja. Määritä lisäksi kolmion hypotenuusan pituus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

66. Suunnikkaan sivuvektorit ovat $\overline{c} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ ja $\overline{d} = -4i + \overline{j} + 7\overline{k}$. Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit ja laske niiden välinen kulma asteen tarkkuudella.

1. Harjoituskoe

1. a) Lausu vektorit $\overline{s}$, $\overline{t}$ ja $\overline{v}$ kantavektorien $\overline{i}$ tai $\overline{j}$ avulla.
   b) Laske vektorien $\overline{s}$ ja $\overline{v}$ pituus.
   c) Piirrä summavektori $\overline{v}+\overline{t}$.



2. Ratkaise yhtälöt kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
   a) $\sin x = 0{,}54$
   b) $\cos 2x - 3{,}1 = -2{,}8$
   c) $2\tan 2x = 12$.
   Ilmoita vastaukset radiaaneina.

3. Tarkastellaan vektoreita $\overline{a} = \overline{i} - 3\overline{j}$ ja $\overline{b} = -2\overline{i} + 4\overline{j}$.
   a) Laske vektorien välinen kulma asteen tarkkuudella.
   b) Vektorin $\overline{a}$ alkupiste on $(0, 2)$. Mikä on summavektorin $\overline{a}+\overline{b}$ loppupiste? Käytä apuna paikkavektoreita.

4. Lamppu on suoran särmiön muotoinen. Sen pohjakolmion sivut ovat 18 cm, 22 cm ja 24 cm. Lampun korkeus on 7,2 cm. Laske lampun tilavuus.

5. Maailmanpyörässä istuvan henkilön etäisyyttä maanpinnasta $f(\text{m})$ voidaan mallintaa funktiolla

   $$f(x) = 25\sin\left(\frac{\pi}{60}x\right),\ 0 \le x \le 60.$$

   Funktio esittää maailmanpyörän kierrosta, ja aika x on ilmoitettu sekunteina alkaen hetkestä, jolloin kori on maanpinnan tasolla.
   a) Millä korkeudella kori on 10 sekunnin kuluttua kierroksen alkamisesta?
   b) Millä ajanhetkellä kori on 23 metrin korkeudessa?

6. Jaa vektori $4\overline{i} - 2\overline{j}$ vektorien $\overline{i} - \overline{j}$ ja $2\overline{i} - 3\overline{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

2. Harjoituskoe

1. a) Ympyräsektorin kaaren pituus on 2,3 dm ja säde 15 cm. Laske keskuskulman suuruus asteina sekä sektorin pinta-ala.
   b) Muunna kulma radiaaneiksi, kun kulman suuruus on 75°.
   c) Muunna kulma asteiksi, kun kulman suuruus on $\frac{4}{5}\pi$.

2. Ratkaise yhtälö. Ilmoita vastaus asteina kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
   a) $\sin x = 0{,}66$ b) $\cos\alpha = -0{,}765$ c) $\sin 2x = -0{,}87$

3. Määritä yhtälön
   a) $\tan x = -\frac{4}{3}$ b) $4\tan 4\alpha - 7 = 0$
   juurista ne, jotka kuuluvat välille $[0°, 360°]$. Ilmoita vastaus asteen tarkkuudella.

4. Pisteet $A = (1, 4)$, $B = (-2, -5)$ ja $C = (6, -1)$ muodostavat kolmion.
   a) Onko kolmio suorakulmainen? Perustele vastauksesi laskennallisesti.
   b) Laske kolmion pinta-ala kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. Koordinaatiston yksikkönä on metri.

5. Milla lähtee metsään majalle. Hän etenee ensin 670 m vektorin $\overline{j}$ suuntaan, minkä jälkeen hän kulkee 250 m vektorin $8\overline{i} - 6\overline{j}$ suuntaan. Kuinka kaukana Milla on lähtökohdasta linnuntietä mitattuna? Koordinaatiston yksikkönä on metri.

6. Vektorit $\overline{a} = -\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} - 5\overline{j} - 2\overline{k}$ lähtevät samasta pisteestä. Määritä
   a) $\overline{a} + \overline{b}$
   b) $\overline{a} - \overline{b}$
   c) vektori $\overline{c}$ siten, että $\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

7. Olkoon pisteet $A = (1, -2, -1)$ ja $B = (-2, 1, 5)$. Jaa vektori $\overline{AB}$ vektorien $\overline{i} - \overline{k}$ ja $\overline{j} + \overline{k}$ suuntaisiin komponentteihin.

3. Harjoituskoe

1. a) Laske $\sin 0{,}37$.
   b) Ratkaise yhtälö $\sin x = 0{,}37$ asteen tarkkuudella.
   c) Ratkaise yhtälö $\cos 2\beta = -0{,}67$, kun $0 \le \beta \le 2\pi$. Ilmoita vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

2. Vektorit $\overline{a} = -3\overline{i} - 4\overline{j}$, $\overline{b} = -8\overline{i} + 4\overline{j}$ ja $\overline{c} = 5\overline{i} + 2\overline{j}$ ovat koordinaatiston pisteiden *A*, *B* ja *C* paikkavektoreita mainitussa järjestyksessä. Pisteet muodostavat kolmion. Määritä
   a) pisteiden koordinaatit
   b) kolmion sivujen pituudet kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella, kun koordinaatiston yksikkönä on metri
   c) $\overline{AC}°$.

3. Laske vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma asteen tarkkuudella, kun
   a) vektoreiden pistetulo on 3, $|\overline{a}| = \sqrt{2}$ ja $|\overline{b}| = 3$
   b) $\overline{a} = -\overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 2\overline{k}$.

4. Pekka heittää paperilennokin ilmaan. Tuuli tarttuu lennokkiin ja sen rata on käyräviivainen. Lennokin kiihtyvyys *a* mielivaltaisessa radan kohdassa voidaan jakaa radan tangentin suuntaiseen kiihtyvyyteen a_t ja normaalin suuntaiseen kiihtyvyyteen a_n. Lennokin kiihtyvyyden suuntakulma β saadaan yhtälöstä

   $$\tan\beta = \frac{a_t}{a_n},\ 0 < \beta < 900.$$

   a) Laske tangenttikiihtyvyys, kun normaalikiihtyvyys on $1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja suuntakulma $\alpha = 45°$.
   b) Mikä on lennokin kiihtyvyyden suuntakulma, kun tangenttikiihtyvyys on $0{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja normaalikiihtyvyys $1{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

5. Lentokone *A* nousee kentältä suuntaan $6\overline{i} + 9\overline{j} - 15\overline{k}$ ja lentokone *B* myöhemmin suuntaan $4\overline{i} + 6\overline{j} - 10\overline{k}$. Nousevatko koneet samaan suuntaan?

6. Suunnikkaan muotoisen saaren kahden erisuuntaisen sivun pituudet ovat 550 m ja 389 m. Kaksi saaren kulmista on teräviä. Terävän kulman suuruus on 48°. Laske saaren pinta-ala.

Tehtävien vastaukset

1.1 Erilaisia kulmia ja kulman yksiköitä

1. a) 216° b) 792° c) –324°

2. a) –120° b) –1080°

3. –2070°

4. a) $\alpha \approx 0{,}85$ b) $\alpha \approx 2{,}43$

5. a) 29 cm b) 0,594 m

6. a) 0,44 b) 4,2 c) 11

7. a) 45,8° b) 65,3° c) 157°

8. a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{5\pi}{6}$

9. 70° eli 1,2 rad

10.

Asteet	Kulma-minuutit ja -sekunnit	Radi-aanit
30°	1800′	0,52
4,2°	250′ 40″	0,073
217°	3′ 38″	3,8

11. –540°

12. a) 0,244 b) 4,97 c) 7,17

13. a) 9,17° b) 85,9° c) 344°

14. a) $\frac{5\pi}{3}$ b) $\frac{11\pi}{12}$ c) $\frac{7\pi}{4}$

15. a) 38 cm b) 12 cm

16. $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{5\pi}{12}$

1.2 Sini, kosini ja tangentti

17. a) 0,6 b) 0,6 c) –0,6

18. a) 1,0 b) –0,64 c) 0,91 d) 0,042

19. a) –0,6 b) –0,6 c) 0,6

20. a) $\beta \approx 160°$ b) $\beta \approx 221°$

21. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. $\sin 35° \approx 0{,}6$, $2\sin 35° \approx 1{,}2$ ja $\sin 70° \approx 0{,}9$

23. a) 0,4 b) 0,4 c) –0,4

24. a) 0,74 b) –0,469 c) 0,85 d) –0,737

25. a) 0,7 b) 0,7 c) –0,7

26. a) 0 b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

27. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ja $\cos(x + 2x + 3x) = -1$

28. $\frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{2}$

30. a) $\beta \approx 49°$ b) $\beta \approx -40°$ (320°)

31. a) 1,8 b) –0,6

32. a) 0,90 b) –2,7 c) 0,93 d) –0,92

33. a) –1,7 b) 1,7 c) –1,7

34. a) $\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\tan\alpha = \sqrt{3}$

35. a) $\alpha \approx 120°$ b) $\alpha \approx 25°$

36. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

37. $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$

38. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

39. a) –0,6 b) –0,8 c) 0,8

40. a) 0,26 b) 0,27 c) –0,50

41. $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja

$\tan\frac{5\pi}{4} = 1$

42. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

43. a) $\beta \approx 41°$ b) $\beta \approx 110°$

44.

Kulma	Sijainti
210°	III
70°	I
300°	IV
130°	II
$\frac{5\pi}{3}$	IV
$\frac{\pi}{3}$	I
$\frac{5\pi}{4}$	III
$\frac{3\pi}{4}$	II

2.1 Siniyhtälö

45. a) $\beta \approx 64° + n \cdot 360°$
tai $\beta \approx 116° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $\beta \approx -14° + n \cdot 360°$
tai $\beta \approx 194° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

46. a) $\gamma \approx 0{,}166 + n \cdot 2\pi$
tai $\gamma \approx 2{,}98 + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $\gamma \approx -0{,}965 + n \cdot 2\pi$
tai $\gamma \approx 4{,}11 + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

47. a) $x \approx 24° + n \cdot 360°$
tai $x \approx 156° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $x \approx -64° + n \cdot 360°$
tai $x \approx 244° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

48. $x \approx 6{,}0$

49. $x = 135°$

50. $x \approx 0{,}241 + n \cdot \frac{\pi}{2}$ tai
$x \approx 0{,}544 + n \cdot \frac{\pi}{2}$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

51. $x \approx 4{,}3° + n \cdot 180°$ tai
$x \approx 85{,}7° + n \cdot 180°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

52. $x \approx 3{,}8° + n \cdot 120°$ tai
$x \approx 56{,}2° + n \cdot 120°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

53. $x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ tai
$x \approx \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

54. $x = -\frac{\pi}{12} - n \cdot \pi$ tai
$x = -\frac{5\pi}{12} - n \cdot \pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

55. 34°

56. 38°

57. 19°

58. a) 7,43
b) $\alpha \approx 66° + n \cdot 360°$ tai
$\alpha \approx 114° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

59. a) $x \approx 44° + n \cdot 360°$
tai $x \approx 136° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $x \approx -44° + n \cdot 360°$ tai
$x \approx 224° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

60. a) $\beta \approx 0{,}57 + n \cdot 2\pi$ tai
$\beta \approx 2{,}6 + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $\beta \approx -0{,}39 + n \cdot 2\pi$
tai $\beta \approx 3{,}5 + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

61. a) $x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai
$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

b) $x = \frac{7\pi}{12} + n \cdot \pi$ tai
$x = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

62. $x \approx -0{,}243 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$
tai $x \approx 1{,}29 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

63. 15°

2.2 Kosini- ja tangenttiyhtälöt

64. a) $x \approx \pm 43{,}0° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $x \approx \pm 115° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

65. a) $\gamma \approx \pm 0{,}403 + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $\gamma \approx \pm 1{,}84 + n \cdot 2\pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

66. a) $x \approx \pm 0{,}68 + n \cdot \pi$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
b) $x \approx \pm 0{,}36 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

67. $\alpha \approx \pm 66° + n \cdot 360°$,
$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

68. a) $x = \pm 60° + n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x \approx \pm 35° + n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

69. a) $x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x = \pm \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

70. $\gamma \approx \pm 0{,}58 + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

71. 120°

72. 81°

73. 71°

74. a) $x \approx 78° + n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x \approx -86° + n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

75. a) $\gamma \approx 1{,}54 + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $\gamma \approx -1{,}33 + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

76. $x \approx 40° + n \cdot 90°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

77. $x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

78. a) $x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x = \frac{3\pi}{16} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

79. $x \approx 1{,}4$

80. $x \approx 71{,}6° + n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

81. Huippukulma on 37°.

82. Rinteen jyrkkyys on enintään 39°.

83. a) $x \approx \pm 1{,}5 + n \cdot 2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x \approx -1{,}5 + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

84. a) $\beta \approx 52° + n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $\beta \approx 173° + n \cdot 360°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

85. a) $\alpha \approx 58° + n \cdot 180°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $\alpha \approx \pm 114° + n \cdot 360°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

86. a) $x = \pm \frac{3\pi}{8} + n \cdot 2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

87. 16°

88. Vaihe-ero on $\pm 25° + n \cdot 360°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3.1 Trigonometristen funktioiden jaksollisuus

89. –

90. a) $x \approx 1$ b) $x \approx 0{,}6$

91. a) $x \approx 0{,}2$ tai $x \approx 1{,}4$
b) $x \approx -0{,}8$

92. a) $x \approx 1{,}4 + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) $x \approx \pm 0{,}66 + n \cdot \pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

93. $x \approx -\frac{3\pi}{4}$ tai $x \approx \frac{\pi}{4}$

94. $x \approx 0$

95. $\cos x = \cos(-x)$

96. a) –
b) f saa arvot välillä $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,
k saa arvot välillä $[-3, 3]$

97. Funktion $\cos 2x$ jakso on $\pi = 180°$, funktion $\cos 4x$ jakso on $\frac{\pi}{2} = 90°$ ja funktion $\cos 0{,}5x$ jakso on $4\pi = 720°$.

98. –

99. a) $x \approx -1{,}9$, $x \approx -1{,}3$, $x \approx 0{,}2$ tai $x \approx 0{,}8$
b) $x \approx -0{,}7$ tai $x \approx -0{,}3$

100. $x \approx 0{,}25 + n \cdot 2\pi$ tai $x \approx 2{,}9 + n \cdot 2\pi$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

101. a) –
b) Mitä suurempia arvoja k saa, sitä tiehämmin funktion saamat arvot toistuvat eli funktion jakso pienenee.

3.2 Sovelluksia

102. a) Hetkellä 1,0 s punnus on 0,51 m tasapainoaseman yläpuolella ja hetkellä 2,0 s se on 0,15 m tasapainoaseman alapuolella.
b) hetkellä $t = 0{,}05$ s

103. a) suurin syvyys 24,4 m, pienin syvyys 16,8 m
b) 18,7 m

104. a) 2,8 m b) 8 s

105. a) 22 500 b) 13 500

106. $1{,}1 + n \cdot 2\pi$ tai $2{,}0 + n \cdot 2\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

107. a) $71° + n \cdot 360°$ tai $110° + n \cdot 360°$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
b) 3,8 V

108. a) 2,0 m b) 2,0 m

109. $f(t) = -12 \sin\left(\frac{5\pi}{4} t\right)$

110. a) 860 MWh
b) 1000 MWh

111. a) 20 cm b) 0,8 s

112. $A = 6{,}2$ ja $B = 5{,}7$

113. a) 27 m päässä portista
b) 100 s kuluttua purukumin tarttumishetkestä

4.1 Kolmion ja suunnikkaan ala

114. a) 16 cm^2 b) 3,7 cm^2

115. a) 12 m^2 b) 89,9 cm^2

116. 1,7 m^2

117. 563 cm^2

118. 2200 cm^2

119. 125 dm^2

120. 48° tai 132°

121. 30°, 30°, 150°, 150°

122. 220 000 l

123. 82,26 €

124. 3,4 m

125. 15 dm, 30 dm

126. 4,77 cm^2

127. a) 30 m^2 b) 110 dm^2

128. 20 400 kg

129. 8,4 l

130. 62° tai 118°

131. 32 m, 29 m

4.2 Sinilause

132. a) 21,5 cm b) 4,3 m

133. $\alpha = 102°$, $\beta = 52°$

134. 2,5 cm, 2,7 cm

135. 18,1 dm

136. 19 cm

137. 57°, 77°, 11,8 cm tai 123°, 11°, 2,31 cm

138. 450 000 €

139. 41 m

140. 50,1 cm

141. 33,5° tai 0,5°

142. 27°

143. tornin korkeus 76 m, katseluetäisyydet 1,2 km ja 1,7 km

144. a) 31 cm
b) 77° tai 103°

145. 360 m

146. a) 25° b) 0,67 m^2

147. 4550 kg

148. 323 m

4.3 Kosinilause

149. a) 2,1 m b) 42 cm

150. 15°, 30°, 175 cm

151. 43°, 55°, 82°

152. 7200 jalkaa

153. a) 5,8 dm b) 12 m

154. 2,6 m, 4,6 m

155. 0,61 km^2

156. 302 m

157. 99 dm^3

158. 153 cm, 296 cm

159. 4,0 km

160. 3,7 km

161. 94,2 m

162. a) 115° b) 4,6 m

163. 3,5 m

164. 16 dm

165. 95,7°, 33,6°, 50,7°

166. 1,5 dm^3

5.1 Peruskäsitteitä

167. –

168. –

169. –

170. –

171. a) –
b) $\overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{AC}$
c) $\overline{AE}, \overline{AD}$
d) $\overline{AF}$

172. –

173. a) 8,9 b) 15

174. –

175. –

176. –

177. a) 20° b) 125°

178. a) 80° b) 160°

179. –

180. –

181. –

182. a) – b) –
c) $\sqrt{10}$

183. $|\overline{AB}| \approx 5{,}4$

184. 58°, 32°, 26°

5.2 Laskutoimitukset

185. –

186. –

187. (4, 0), (–2, 12)

188. –

189. a) $2\overline{a} + 11\overline{b}$ b) $8\overline{a} + 3\overline{b}$

190. –

191. –

192. –

193. (0, 0)

194. a) –
b) Palokärjet voittivat.

195. –

196. a) $\frac{1}{5}\overline{c} + \frac{1}{4}\overline{d}$
b) $8\overline{c} + 10\overline{d}, -8\overline{c} - 10\overline{d}$

197. $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a}$,
$\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{b} - \frac{1}{2}\overline{a}$

198. $\overline{c}$

199. $-\frac{3}{5}\overline{a} + \overline{b}$

200. –

201. –

202. a) $\overline{d} - 3\overline{e} + 4\overline{f}$
b) $-18\overline{d} + 54\overline{e} - 72\overline{f}$

203. a) $2\overline{p} + \overline{s}$, $\overline{s}$
b) $\overline{p} + \overline{c} - \overline{b}$, $-\overline{p} + \overline{c} - \overline{b}$

204. $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$,
$\overline{AO} = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$

5.3 Komponentteihin jako

205. –

206. $t = 1$

207. $s = -9$, $r = -\frac{1}{2}$

208. $t = 1$, $u = -2$

209. $\frac{5}{2}(\overline{i} + \overline{j}), -\frac{1}{2}(\overline{i} - \overline{j})$

210. $-2(3\overline{x} + \overline{y}), 5(\overline{x} + 2\overline{y})$

211. Ovat yhdensuuntaisia.

212. Eivät ole samansuuntaisia.

213. Eivät ole vastakkaissuuntaisia.

214. $x = 3,\ y = 9$

215. $t = 2$

216. –

217. 1) $a = \frac{10}{3},\ a = 1$ 2) $a = 1$

218. $-2(\bar{a} + \bar{b}),\ 3(\bar{a} - \bar{b})$

219. Eivät ole yhdensuuntaisia.

220. 36,9 N

5.4 Vektorit *xy*-koordinaatistossa

221. –

222. –

223. $-6\bar{i} + \bar{j},\ -\frac{2}{3}\bar{i} + 3\frac{1}{3}\bar{j},$
$-0{,}6\bar{i} + 4{,}5\bar{j}$

224. (–3, 15)

225. (2, 2), (–4, 6)

226. (0, –3)

227. a) 11 b) 6,0
c) 2,5

228. a) $-\frac{3}{5}\bar{i} + \frac{4}{5}\bar{j}$
b) $-9\bar{i} + 12\bar{j}$

229. $5\bar{i} + 12\bar{j},\ 13$

230. $-3\bar{i} - 6\bar{j}$; 6,7; 27

231. 380 m

232. a) $7\bar{i} + 5\bar{j}$ b) $4\bar{i} + 3\bar{j}$
c) $7\bar{i} - 10\bar{j}$

233. $\overline{OA} + \overline{OB} = 8\bar{i} + 4\bar{j}$

234. 0, $-14\bar{j}$

235. $\left(\frac{11}{4}, \frac{22}{4}\right)$, 1:3

236. (3, 4)

237. Piste B

238. 8,85

239. a) $5\bar{i} + 7\bar{j}$, $\sqrt{74}$
b) $4\bar{i} - 3\bar{j}$, 5
c) $-6\bar{i} - 2\bar{j}$, $\sqrt{40}$

240. $\overline{AB} + \overline{BC} = 8\bar{i} - 5\bar{j}$,
$\sqrt{89}$

241. (22, 12)

242. $-\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{9}{2}\bar{j},\ \left(-\frac{17}{6}, \frac{17}{6}\right)$

243. $\frac{1}{15}\overline{AB} + \frac{3}{5}\overline{AC}$

5.5 Vektorit *xyz*-koordinaatistossa

244. –

245. –

246. (–3, 1, 1)

247. (–8, 11, 2)

248. a) 1,7 b) 21

249. $\sqrt{741}$

250. $-\frac{32}{5}\bar{j} - \frac{24}{5}\bar{k}$

251. a) $\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$
b) $\frac{14}{3}\bar{i} - \frac{7}{3}\bar{j} + \frac{14}{3}\bar{k}$

252. $3\bar{i} + 8\bar{j} + 2\bar{k}$, 9 m

253. a) $4\bar{i} - 6\bar{j} + 6\bar{k}$
b) $8\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$

254. $a = -2$

255. (0, 0, –4)

256. $\left(-3\frac{2}{7}, 5\frac{6}{7}, -7\frac{6}{7}\right)$

257. Eivät kohtaa

258. a) (1, 5, 6)
b) $\left(2\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}\right)$

259. $\sqrt{10}, \sqrt{59}, 7$

260. $t = 3$

261. (–3, 4, –6)

262. Ei leikkaa.

5.6 Vektoreiden pistetulo eli skalaaritulo

263. a) –13 b) –29

264. a) 16 b) –36

265. –

266. $a = \sqrt{\frac{3}{4}},\ a = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

267. –

268. $r = -2,\ r = 1$

269. on

270. a) -40 b) 104

271. a) 90° b) 53°

272. 90°, 63°, 27°

273. 49°, 7

274. a) (7, 0), (3, 2), (4, –2)
b) 60°, 14

275. a) –67 b) $-28\frac{1}{5}$

276. a) 22 b) –30

277. a) 11° b) 82°

278. $17\bar{i}+17\bar{j}$, $7\bar{i}-7\bar{j}$, 90°, $\frac{7}{17}$

Kertausosa

1. a) 576° b) –864°

2. a) 0,68 b) 1,9

3. a) 0,890 b) 2,22
c) 7,77

4. a) 351° b) 14°
c) 630°

5. 7,5 cm

6. a) 0,383 b) 0,309
c) 0,294

7. –

8. –

9. $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{15}}$

10. –

11. –

12. $\tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

13. a) $33° + n \cdot 360°$ tai
$147° + n \cdot 360°$
b) $-15° + n \cdot 360°$ tai
$195° + n \cdot 360°$

14. $11{,}8° + n \cdot 180°$ tai
$78{,}2° + n \cdot 180°$

15. $t = 0{,}4$ s

16. $0{,}31 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ tai
$0{,}74 + n \cdot \frac{2\pi}{3}$

17. a) asteina:
$\pm 81° + n \cdot 360°$,
radiaaneina:
$\pm 1{,}4 + n \cdot 2\pi$
b) asteina:
$87° + n \cdot 180°$,
radiaaneina:
$1{,}5 + n \cdot \pi$

18. a) $\pm\frac{\pi}{6}+n2\pi$
b) $\frac{5\pi}{6}+n\pi$

19. a) $\pm 17{,}6° + n \cdot 90°$
b) $40{,}9° + n \cdot 90°$

20. 35 asteen kulmassa

21. kello 9.00

22. –

23. –

24. $\frac{3\pi}{8}+n\pi$

25. a) $\pm 42° + n \cdot 180°$
b) $40° + n \cdot 90°$

26. a) 0,67 s b) 5,0 cm

27. a) 170 cm
b) 0,33 s ja 1,7 s
c) 4 s

28. a) 5,4 m^2 b) 190 cm^2

29. 58°

30. 6,4 km^2

31. 610 cm^3

32. a) 39 cm b) 11 dm

33. 220 cm^2

34. 25 cm^2

35. 34° ja 74°

36. a) 10 m b) 3,4 dm

37. 47°, 57°, 76°

38. 3,2 km

39. 1,10 m

40. –

41. –

42. –

43. a) 45° b) 135°

44. –

45. –

46. $\bar{a}=\bar{e}-\bar{d}-\bar{f}$,
$\bar{b}=\bar{d}-\bar{e}+\bar{f}$, $\bar{c}=\bar{e}-\bar{d}$

47. a) on b) on
c) ei d) on

48. $\overline{t} = -\overline{a} - 7\overline{b}$, $\overline{p} = 3\overline{a} - \overline{b}$

49. $\overline{d} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{e} = \overline{a} - \overline{b}$

50. $-3(2\overline{i} - \overline{j}) - 1(\overline{i} + 4\overline{j})$

51. $2(\overline{i} + \overline{k}) + 3(\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k})$

52. $k = 3\frac{1}{2}, s = 4$

53. $x = -\frac{3}{2}$, vektorit ovat erisuuntaisia

54. a) $|\overline{a}| = \sqrt{13}, |\overline{b}| = 5$
b) $\overline{b^\circ} = -\frac{4}{5}\overline{i} - \frac{3}{5}\overline{j}$
c) $-\overline{i} - \overline{j}$ d) $7\overline{i} + 5\overline{j}$
e) $16\overline{i} + 12{,}5\overline{j}$

55. $\overline{OA} = 2\overline{i} + 4\overline{j}$,
$\overline{OB} = -\overline{i} + 3\overline{j}$, pisteen y-koordinaatti olisi -6.

56.
$|\overline{AB}| = 3, |\overline{AC}| = \sqrt{58}, |\overline{BC}| = 5$

57. (2, 0)

58. a) $-3\overline{i} + 2\overline{j} - 6\overline{k}$
b) $3\overline{i} - 2\overline{j} + 6\overline{k}$
c) $\sqrt{139}$

59. a) $\overline{OA} = -2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$
$\overline{OB} = 5\overline{i} - 12\overline{j} + \overline{k}$

b)
$\overline{OA^\circ} = -\frac{2}{7}\overline{i} - \frac{3}{7}\overline{j} + \frac{6}{7}\overline{k}$

c) $\sqrt{170}$

60. ± 8

61. $\overline{d} = 6\overline{i} + 3\overline{j} - 22\overline{k}$

62. a) (–3, 2, –1)

63. a) –39 b) 162°

64. a) ± 3 b) 90°

65. $x = -\frac{2}{3}$, hypotenuusan pituus 3,0

66. lävistäjät $-6\overline{i} + 4\overline{j} + 6\overline{k}$ ja $2\overline{i} + 2\overline{j} - 8\overline{k}$, kulma 131°

Harjoituskoe 1

1. –

2. a) $0{,}57 + n2\pi$ tai $2{,}6 + n2\pi$
b) $\pm 0{,}63 + n\pi$
c) $0{,}70 + n\frac{\pi}{2}$

3. a) 172° b) (–1, 3)

4. 1,4 dm^3 = 1,4 l

5. a) 12,5 m
b) 22 s ja 38 s

6. $16(\overline{i} - \overline{j}) - 6(2\overline{i} - 3\overline{j})$

Harjoituskoe 2

1. a) 88°, 170 cm^2
b) $\frac{5\pi}{12}$ c) 144°

2. a) $41° + n \cdot 360°$ tai $139° + n \cdot 360°$
b) $\pm 140° + n \cdot 360°$
c) $-30° + n \cdot 180°$ tai $120° + n \cdot 180°$

3. a) 127°, 307°
b) 15°, 60°, 105°, 150°, 195°, 240°, 285°, 330°

4. a) ei ole b) 30 m^2

5. 560 m

6. a) $\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{k}$
b) $-3\overline{i} + 9\overline{j} - \overline{k}$
c) $\overline{c} = 5\overline{i} - 14\overline{j} - \overline{k}$

7. $-3(\overline{i} - \overline{k}) + 3(\overline{j} + \overline{k})$

Harjoituskoe 3

1. a) 0,36
b) $22° + n \cdot 360°$ tai $158° + n \cdot 360°$
c) 1,2; 4,3

2. a) $A(-3, -4)$, $B(-8, 4)$, $C(5, 2)$
b) 5,00 m, 8,94 m, 5,39 m
c) $\frac{4}{5}\overline{i} + \frac{3}{5}\overline{j}$

3. a) 45° b) 90°

4. a) 1,5 m/s^2 b) 42°

5. Nousevat samaan suuntaan.

6. 16 ha

Hakemisto

A
aaltofunktio 66
aaltoliike 69
avaruuskoordinaatisto 141

H
harmoninen värähtely 64

I
identtinen 101

J
jaksollisuus 55

K
kantavektori 130
kohtisuoruusehto 153
kolmion ala 76
komponentti 122
kosini 19
kosinilause 93
kosiniyhtälö 44
kulmaminuutti 13
kulman alkukylki 8
kulman loppukylki 8
kulmasekunti 13

N
neljännes 18
nollavektori 103

P
paikkavektori 130, 141
pisteiden välinen vektori 133, 145
pistetulo 151, 154
pituus 100, 131, 143

R
radiaani 9
resultantti 110

S
samansuuntainen 101
sini 15
sinilause 85
siniyhtälö 33
skalaarisuure 101
skalaaritulo 151
summavektori 110
suplementtikulma 34
suunnattu kulma 8
suunnikkaan ala 77

T
tangentti 22
tangenttiyhtälö 48
tangenttipiste 22
trigonometrinen funktio 55

V
vastakkaissuuntainen 100
vastavektori 100
vektoreiden yhtäsuuruus 101
vektori 100
vektorisuure 101

Y
yhdensuuntainen 101
yhdensuuntaisuusehto 113
yksikköympyrä 10
yksikkövektori 103